韓國心理學會誌: 女性
Korean Journal of Psychology: Women
1997, Vol. 2, No. 1, 44-60

수리능력의 발달과 성차에 관한 설명 모델: 인지발달적 모델의 필요성

조숙자
이화여자대학교 교육심리학과

본 논문은 수리능력의 발달과 성차를 설명하는 전통적 설명 방식인 생물학적 설명과 환경적 설명이 갖고 있는 제한점을 알아보고 그 대안으로 인지발달적 모델을 제안하였다. 수리능력의 일반적 발달을 설명하는 Miller의 모델이 갖는 특성을 살펴보고, 이것이 수리능력의 성차를 설명하기 위한 모델로 적절한지의 가능성을 이론적으로 살펴보았다. 그 결과, 수리영역에서 가장 큰 성차를 보이는 기하와 대수도 영역이 아닌 개념적, 연산적, 상징적 능력으로 구분될 수 있음을 보았다. 또한 이런 접근은 수리능력에서의 성적 불균형을 해소하는데 기여할 것이라고 예상한다.

인지능력의 성차에 관한 연구들은 공간, 수리, 언어능력에서의 성차를 보고하고 있다. 이런 연구 결과와 더불어 인지능력의 성차에 관한 일반적 고정관념은 남성과 여성을 각기 다른 생활의 장에서 살도록 압력을 주고 있다. 본 논문에서는 인지적 성차에 관한 기존의 설명을 살펴보고 최근에 활발히 연구가 시작되고 있는 인지발달적 접근이 어떻게 성차를 설명할 수 있는지를 검토해보고자 한다.

인지능력의 발달과 성차에 관한 전통적 설명방식

인지능력에서의 성차에 관한 논의는 그 파급효과가 큰 만큼 많은 연구자들이 성차의 기원에 대해 관심의 가져왔다. 이런 관심은 생물학적 설명과 환경적 설명으로 대별될 수 있다. 언어, 수리, 공간에서의 성차에 관한 연구 중의 많은 부분은 이 두 주장 중의 하나에 조금 더 동조적인 태도를 취하고 있다.

인지적 성차를 생물학적 힘으로 설명하고자 하는 연구의 주된 논지는 뇌의 구조와 기능, 호르몬의 기능, 유전인자의 기능으로 성차를 설명하고자 하는 것이다. 이는 최근의 눈부신 뇌영상기법의 활용등 연구방법의 발전과 신경생리학의 지식이 축적됨에 따라 가히 뇌의 십년이란 말이 전혀 지나치지 않을 정도로 크게 부각되고 있는 분야이다. 인지적 성차를 생물학적 힘으로 그것도 주로 뇌로 설명하고자 하는 시도는 이전에는 직접 확인할 수 없었던 뇌에서 일어나는 현상을 입체적으로 그려내고 수량화할 수 있게 됨에 따라 일반인에게도 설득력있는 설명으로 비춰지고 있다. 그러나 유전인자, 호르몬, 뇌라는 생득적인

힘에 의해 인지능력의 성차를 설명한다는 점에서 결정론적인 입장을 취한다. 즉 인지능력에서의 성차는 생물학적 힘에 의해 결정된 고정적인 차이라는 것을 강조한다.

생물학적 설명은 인지능력에서의 성차가 분야에 따라 비교적 일관되게 지속되고 그 역사가 길다는 데서 현실적 증거를 찾고 있다. 예를 들어 Benbow와 Stanley(1980)는 미국의 7, 8학년 우수아를 대상으로 한 종단연구에서 수리능력에서 성차가 있으며 특히 점수대가 높이 올라갈수록 그 차는 현저하다는 것을 지적하면서 남성의 더 큰 변산성(great male variability)이 수리능력에서도 그대로 적용되어 나타난다고 했다. 즉 현상적으로 나타나는 남녀의 차이는 생물학적 변산성이 남성이 더 넓다는데 기초한다고 주장한다.

생물학적 소인에 의해 인지능력의 성차가 생긴다는 설명은 뇌의 혈류, 대사량의 차이, 뇌자기의 변화 등 구체적 자료로서 그 증거를 찾을 수 있기 때문에 원인에 대한 설명이 비교적 명확하다. 그러나 이는 인지적 성차 때문에 생길 수도 있는 불균형 및 불평등을 어떻게 해소할 것인지에 대한 시사점을 주지는 못하고 있다. 예를 들어 수학을 못하는 여학생을 위해 유전자를 조작한다든지 호르몬요법을 사용하는 등의 처치는 현실적으로 어렵다. 그렇다고 인지적 능력에 관한 성차는 생물학적으로 결정되므로 자연스럽게 받아들여야 할 만큼 사소한 문제도 아니다.

이에 반해 인지적 성차는 남녀에게 가해지는 상이한 환경의 힘 때문에 생겼다는 것이 환경가설이다. 사회가 규정해 놓은 이상적 남녀의 모습이 다르기 때문에 남녀는 의식하든 안하든 간에 매우 다른 생활의 장에서 살게 된다는 것이다. 비록 부모가 아들과 딸에 대해 의식적으로 동일한 환경을 제공해 준다 할지라고 아동을 둘러싼 거시환경은 여전히 남녀 이분법적 구분이 존재하고 이것이 암암리에 작용한다는 점에서 개인은 성이분법적 환경에서 자유로울 수 없다. 성이분법적인 환경은 인지능력에 대해서도 그대로 적용되고 있다. 학교 교과목이 여학생의 과목과 남학생의 과목으로 나뉘는 것, 여전히 존재하는 여성적 직업과 남성적 직업 등은 여성이 잘하고 잘해야 하는 분야, 남성이 잘하고 잘해야 하는 분야를 구별하고 있다. 인지능력 중 전통적으로 여성은 언어영역을 남성은 공간과 수리를 잘하고 잘해야 한다고 생각한다. 인지능력에 관한 기대, 자기효능감, 동기, 귀인, 곤란도지각과 같은 요인도 성차를 만드는 요인이라 여겨지고 있다.

인지능력의 성차를 설명하는 환경가설은 우리를 둘러싸고 있는 미시 또는 거시적 환경을 변화시키려는 노력이 인지능력에서의 성차를 줄일 수 있을 것이라는 점에서 생물학적 설명보다 희망적이다. 그러나 환경적인 요인의 변화 또한 말처럼 쉽지도 않고 경우에 따라서는 오랜 시간을 요할 수 있다. 비교적 단기적인 효과를 볼 수 있는 것이라면 부모나 교사의 기대, 자기효능감, 동기, 귀인 등에서의 변화이다. 성별에 따라 갖게 되는 자연스런 기대 중에는 남녀에게 각기 다른 정도의 능력을 전제하고 있음을 쉽게 확인할 수 있다. 이런 고정관념으로부터 자유로울 때, 또한 성별을 떠난 인지능력의 자기효능감을 갖을 때, 하고자 하는 동기가 자연스럽게 유발될 때 인지능력은 성별이라는 제약을 뛰어넘어 과대 또는 과소평가되지 않고 자체의 모습을 드러낼 것이라고 본다. 이런 단기적 환경요인의 중요한 변화주체자는 자신, 부모, 교사 등이다. 그러나 마음먹은 대로 기대, 동기, 효능감, 귀인이 변화되기 위해서는 더 큰 환경체계가 변해야 한다. 성이분법적 사회적 관습이 존재하는 한, 또한 이를 강화시키는 매체가 큰 영향력을 발휘하는 한 개인적 차원의 변화는 그리 기대할 만큼의 수준은 못된다고 본다. 이런 거시적 환경이 변화하기 위해서는 오랜 시간이 필요하다.

생물학적 설명은 구체적 증거를 갖고 성차를 설명하는다는 점에서 설득력을 갖고 있으나 생물

학적 과정 역시 환경의 영향을 받는다는 사실이 밝혀지면서 성차에 관한 결정론적 입장을 유보하게 된다. Huttenlocher(1979)는 대뇌의 전두엽 부분에 있는 시냅스의 수는 출생 직후부터 일년사이에 약 10배로 증가한다고 보고했다. 이런 시냅스의 밀도는 2세까지 증가하다 그후 7세까지는 점점 감소하여 7세 경에 성인 수준의 시냅스 밀도에 이른다고 했다. 이렇게 과도하게 생성된 시냅스는 여러 종류의 인지발달을 가능하게 하며, 어떤 발달의 양성을 취하게 되는가는 경험에 따라 달라져서 많이 사용하는 시냅스는 그대로 유지되지만 그렇지 않은 시냅스는 사라진다. 불필요한 시냅스가 사라짐에 따라 이후의 정보처리는 더 능률적이 된다. 이렇듯 대뇌에 있는 세포들이 시냅스에 의해 연결되는 과정 즉, 시냅스 생성(synaptogenesis)에 관한 연구는 최근에 와서 인지발달 신경과학(cognitive developmental neuroscience) 이 발달함에 자세한 결과들이 쌓여지고 있다.

시냅스 생성에 관한 최근의 결과에 따르면 시냅스 생성은 경험을 기다리는 과정(experience-expectant process)과 경험에 의존하는 과정(experience-dependent process)으로 설명될 수 있다. 경험을 기다리는 과정은 시냅스의 과도한 형성과 형성된 시냅스의 전지에 의해 이루어진다고 가정한다. 초기에 시냅스가 과도하게 형성되는 것은 성숙에 의해 조절되며, 형성된 시냅스 가운데 어떤 시냅스가 전지될 것인지는 경험에 의존한다고 보았다(Greenough 등, 1987). 적절한 시기에 정상적인 경험을 하면 세포들 사이의 정상적인 연결은 유지되지만 적절한 시기에 이러한 경험을 하지 못하면 비정상적 연결이 생긴다. 따라서 어떤 경험이 내뇌의 발달에 정상적으로 영향을 주기 위해서는 그 경험이 필히 일어나야 하는 결정적 시기가 있다. 이렇듯 경험을 기다리는 과정과 관련된 경험들은 대개 진화의 과정에서 종들이 대체로 해왔던 경험들이다 (Bornstein, 1989). 경험에 의존하는 과정은 흔히 학습이라고 알려진 현상의 신경적 대응물(substrate)이다. 여기서는 개인의 독특한 경험에 의해 시냅스가 만들어지는 시기와 만들어졌는지의 여부가 결정된다(Chang & Greenough,1984).

이에 따르면 생물학적 설명의 근간을 이루는 뇌의 시냅스 생성에 경험을 매우 중요한 역할을 한다. 특히 학습에 해당하는 경험에 의존하는 과정은 개인이 어떤 경험을 했는냐에 따라 특정 인지발달의 시기와 발달의 정도가 달라질 만큼 큰 영향력을 발휘한다. 이런 관점에 의한다면 인지능력의 성차는 초기의 환경적 영향이 뇌의 시냅스에 영향을 주어 굳어질 수 있다는 가정이 가능하다. 그렇다면 지금까지 생물학적 설명이 고수하는 발달의 결정론적 입장은 의심을 받게 된다. 환경의 영향력에 의해 발달의 방향이 달라질 수 있다. 만약 이런 관점이 타당하다면 현재 인지능력의 성차에 관한 논의 중 생물학적 관점은 수정되리라고 본다. 생의 초기에 특정한 능력의 발달을 자극하는 환경의 존재 여부가 성차의 기원을 설명하는 틀이 될 수 있다.

생물학적 설명이 구체성의 장점을 갖는데 비해 환경적 설명을 그 구체성이 떨어진다. 성이분화된 사회, 성유형화의 압력, 남녀의 능력에 대한 다른 기대, 능력발휘에 영향 미치는 자기효능감, 동기, 귀인 등은 유전인자, 호르몬, 시냅스 등으로 설명하는 것보다 훨씬 추상적이고 확인하기 어렵다. 그러므로 환경적 영향으로 인지능력의 성차가 생긴다는 설명은 이론적으로는 설득력이 있으나 경험적인 실체를 잡기 어렵다. 이런 점은 환경의 변화를 통해 성차를 줄여보겠다는 시도가 그 만큼 모호할 수 있는 것의 반증이다.

종합해 보면, 인지능력의 성차를 설명하기 위한 전통적인 설명 양식은 각각의 제한점을 갖는다. 생물학적 설명은 구체적이기는 하지만 성차로 인한 불균형과 불평등을 해소할 수 있는 방안을 제시하지 못하고 있다. 환경적 설명은 미시

및 거시 환경을 변화시키면 인지능력의 성차로 인한 불균형과 불평등을 감소시킬 수 있다고 전제한다는 점에서 희망적이지만 환경 자체가 갖는 추상성 때문에 구체적인 방안을 강구하기에는 미흡하다.

이에 최근들어 인지능력의 성차에 관심이 있는 연구자들은 인지과정에 관심을 갖고 이로서 인지능력의 성차를 설명하려는 시도를 하고 있다 (Kimball, 1989; Arnstrong, 1985; Dossey et al., 1988; Gallagher, 1990, 1992; Byrnes & Takahira, 1993; Gallagher & Lisi, 1994; 백한미, 1997; 최성주, 1997). 인지적 접근은 전통적 설명 양식이 갖는 제한점을 보완하고 있다. 인지적 접근은 생물학적 접근처럼 구체적인 논의가 가능하다. 구체적이긴 하지만 대안없는 구체성이 아니라 인지능력의 성차 불균형과 불평등을 감소시킬 수 있는 시사점을 주고 있다. 본 논문에서는 인지능력의 성차 중에서 학업성취와 관련되어 가장 큰 성차를 보이는 수리능력의 성차를 설명하기 위한 인지적 접근의 필요성을 고찰하고자 한다.

수리능력의 발달

수리능력 발달에서 수(number)는 특수한 위치를 차지하고 있다. 만약 수리발달의 기초를 이루는 것이 단일한 수개념 만이 아니라면, 수리의 발달은 어떻게 표상되는가? Wittgenstein(1953, 1958)은 이에 대한 메타포를 제시하고 있다.

"왜 우리는 어떤 것을 수(number)라고 부르는가? 아마도 그것은 지금까지 수로 불리웠던 여러 사물들과 직접적인 관계를 갖고 있기 때문이며, 또한 이것은 우리가 같은 이름으로 불렀던 다른 사물들과의 간접적 관계를 말해 주기 때문이다. 우리는 수의 개념을 섬유질과 섬유질을 꼬아 실을 뽑는 것으로 확장할 수 있다. 이때 실의 강도는 한 섬유질의 총 길이에 의해서가 아니라 얼마나 많은 섬유질이 겹쳐졌느냐에 달려있다."

개념과 표상과 연산적 기술이 상호작용하여 만드는 실 세트의 짜집기가 바로 수리적 발달이라고 이해하게 되면 Wittgenstein의 메타포는 수리발달의 문제로 적용될 수 있다. 그렇다면 수리발달에 기여하는 실들은 과연 무엇인가?

이에 대해 Greeno, Riley와 Gelman(1984)는 세기 능력의 요소들을 제안하고 있다. 이들은 초기의 수리능력은 개념적(conceptual) 능력, 절차적(procedural)능력, 활용(utilization)능력의 세유형으로 나눌 수 있다고 보았다. 개념적 능력은 수학적 개념 (예; 동수인지를 보기 위해 일대일 대응이 중요하다는 것)에 대한 지식들로 구성된다. 활용능력은 과제에서 요구하는 것을 개념적 제약의 용어로 접근할 수 있는 능력을 의미한다. 절차적 능력은 활용적 관건에 제시된 제약에 맞으면서 동시에 개념적 이해도 위반하지 않는 행위의 실제적 과정을 계획하는 능력이다.

학령전 아동에게 일련의 세기와 수과제를 제시하고 요인분석을 한 Ferrara와 Turner(1993)도 비슷한 모델을 제시했다. 이들에 따르면 세기에서의 개인차는 언어적(verbal) 요인, 행동(action) 요인, 맥락(contextual)요인의 세가지 구조로 설명될 수 있다. 언어적 요인은 수와 단어의 순서에 관한 관습에 숙달되는 것을 포함하며, 행동요인은 세기에서의 물체와 단어의 관계에 대한 숙달을 의미하고 맥락요인은 세기의 적용과 목표에 대한 지식을 의미한다. 여기서 행동요인은 Greeno 등의 절차적 능력에 해당하고 맥락적 요인은 Greeno 등의 활용능력에 해당된다. 언어적 요인은 Greeno 등의 모델에 적절히 해당되는 것이 없으며 Greeno 모델의 개념적 능력에 해당되는 것은 Ferrara와 Turner 모델에 없다.

이러한 두 모델은 모두 세기의 인지적 요구를 다루고 있지만 수리능력의 발달을 논하는 보다 일반적 틀로 일반화할 수 있다. 수리능력의 발달은 상징적(symbolic) 능력, 연산적

(algorithmic)능력, 개념적(conceptual) 능력의 상호작용이다. 상징적 능력이란 수표상 및 산술부호와 같은 상직적 기호의 세트를 숙달하는 것이고, 연산적 능력은 산수, 측도, 문제해결과 같은 과정에 이용되는 연산과 기법을 숙달하는 것이다. 개념적 능력은 수의 동수 여부를 알기 위해서는 일대일 대응의 중요성을 이해하고 덧셈은 누가적 조작이라는 것을 깨닫는 등의 수학적 개념을 습득하는 것이다. (Miller, 1996)

Wittgenstein의 직조 메타포는 각기 다른 실들 간의 관계의 중요성을 강조했다는 점에서 가장 큰 유용성을 찾을 수 있다. 수리적 개념과 상징적 표상 그리고 산술적 연산의 통합은 수리추리의 발달에 장애물이며 수리발달에서 반복적으로 부딪치게 되는 곤경의 원천이다. Wittgenstein의 직조 메타포는 수리적 능력은 일련의 짜집기된 능력들의 구성체라는 것 그 이상을 의미한다. 가장 약한 링크 만큼의 강도를 가진 체인과는 달리, 꼬여진 로프의 각각의 위치는 전체 강도에 기여한다. 그러므로 각기 다른 수리적 지식은 수리적 발달에서 서로 상호작용을 보이며 보상적 효과를 가질 것이라는 것을 기대할 수 있다 (Miller, 1996).

읽기에서 능숙한 독해를 하기 위해서는 상황적 정보라는 고수준의 능력 뿐 아니라 글자 재인과 같은 저수준의 능력이 상호작용하듯이 수리능력에서도 각기 다른 능력들이 상호작용을 하여 수리능력의 발달을 이룬다. 또한 읽기에서 어떤한 능력에 어려움을 겪게 되면 다른 하나에 더 많이 의존하듯 수학적 발달에서도 수학적 문제해결에서 학습된 연산 또는 개념적 이해에 의존하는 정도는 아동마다 다르다. 게다가 상징적 체계의 조직화는 아동의 특수 수학적 개념 습득에 중요한 영향을 미친다.

요약하면, 수리능력의 발달은 단일한 수능력에 의존하기 보다는 하위 수리 능력의 상호작용에 의해 이루어진다. Miller는 이를 상징적, 연산적, 개념적능력이라고 보았다. 이러한 세가지의 능력이 단일능력으로 발달 할 뿐 아니라 서로 상호작용하여 통합되어야 수리능력이 제대로 발달된 것으로 보았다. 이러한 수리능력에 관한 일반적인 틀은 연령에 따라 각기 다른 수준을 보이는 수리능력을 발달적 흐름을 이해하는데 큰 도움을 줄 수 있다고 본다. 또한 수리능력의 성차를 이해하고 성별 불균형 및 불평등을 해소하는데도 구체적인 정보를 줄 수 있다고 본다.

수리능력의 성차에 관한 인지적 접근방식의 연구들

인지적 접근 방식에서 가장 초보적인 유형은 문제 유형에 따라 성차를 살펴보는 것이다. 수학문제를 유형별로 분류한 여러 학자들이 있다. Travers는 산수문제, 응용(application)문제, 추상문제, 탐구문제, 프로젝트문제, 증명문제로 문제를 분류하였고 Charles와 Lester는 드릴(drill)문제, 간단한 적용(translation)문제, 복잡한 적용문제, 과정문제, 응용(applied)문제, 퍼즐문제로 분류하였으며, Krulik와 Rudnick 은 표준화된 교과서 문제, 과정문제로 분류하였다. Butts는 기억확인(recognition exercise)문제, 연습(algorithmic)문제, 응용문제, 열린(open-search)문제, 문제장면(problem situations)으로 분류하였고, Greeno는 귀납적 문제, 변형문제, 재배치문제로 분류하였다(박영미, 1990에서 재인용).

Kimball(1989)에 따르면 남학생은 기하문제에서 더 높은 점수를 받고 여학생은 연산문제에서 더 높은 점수를 받는다. 또한 수식문제와 같이 풀고자 하는 문제 파악이 잘되는 정의된 문제에서는 여학생이 잘하지만 기하나 문장제 문제와 같이 풀고자 하는 문제가 정확히 무엇인지 잘 정의되는 않는 문제는 남학생이 더 잘하는 것으로 나타났다(Armstrong, 1985; Dossey et al., 1988).

우리나라에서 행해진 연구로는 권오남, 박경미

(1995)의 연구가 있다. 이들은 수학 성별 차이의 연구에 대한 메타분석을 한 결과 다음과 같은 결과를 얻었다. 첫째, 초등학교 입학전이나 저학년까지는 남녀의 차이가 거의 없고 중학교에서는 미약한 남학생의 우세가 나타나며, 고등학교에서부터 점차 성차가 심화된다. 둘째, 여학생은 계산과 같은 낮은 인지단계의 문제해결에서, 남학생은 추론이나 다단계 문제풀이와 같은 높은 인지단계의 문제해결에서 우세를 보인다. 셋째, 성별의 차이는 점차 감소되는 추세에 있다. 넷째, 공간화 능력을 필요로하는 기하과목에서는 특히 남학생이 여학생보다 우세하다.

이혜경, 한태식(1995)은 수학적 능력은 요인별로 일반요인, 수적요인, 공간요인, 언어요인, 추론요인으로 구성되며, 공간요인과 추론요인에서 남학생이 여학생보다 우수하며, 여러 요인별로 성차가 점차 감소하고 있다고 했다.

조숙자(1996)는 1995년 전국 초중고교생을 대상으로 한 학업성취도 평가 중 수리영역의 평가에 대한 국립교육평가원의 자료를 이용하여 내용 및 행동영역별 성차를 분석한 결과 다음과 같은 결과를 얻었다. 첫째, 수학의 내용영역에서의 성차 중 초등학교에서는 남학생이 여학생보다 수, 연산, 도형, 측도에서 우세를 보였으며 여학생은 관계영역에서 우세하였다. 중학생의 경우 남학생은 정수, 유리수, 문자와 식, 방정식의 영역에서 우세하였고 여학생은 수와 식의 연산에서 우세하였다. 고등학교 남학생은 수1의 수열과 수2의 방정식과 부등식, 수열과 순서도에서 우세하였고, 여학생은 일반수학의 모든 영역 특히 수체계에서의 우세가 두드러졌다. 둘째, 수학의 행동영역에서의 성차를 살펴보면, 초등학교에세는 개념 및 절차 영역에서 남학생이 우세하였고 중학교 남학생은 적용에서 여학생은 지식, 이해영역에서 우세하였다. 고등학생은 일반수학의 경우 이해, 계산, 추론, 문제해결의 모든 행동영역에서 여학생이 우세하였고 수2에서는 계산, 이해, 추론영역에서는 여학생이 문제해결영역에서는 남학생이 우세하였다. 이같은 결과 중 서로 갈등되는 부분을 배제하고 비교적 뚜렷한 차이를 보이는 영역을 살펴보면, 남학생은 여학생에 비해 도형, 측도, 수, 적용, 문제해결에서 우세하였고 여학생은 수와 식의 연산, 지식 및 이해영역에서 우세하였다.

문제해결방안에서의 성차를 보고하는 연구들이 있다. Gallagher(1990, 1992)는 수리능력이 뛰어난 남학생과 여학생이 SAT-M문항 유형에 따라 수행이 다른가를 알아본 결과, 남학생은 명확히 정의되지 않는 문제에서 여학생보다 수행이 뛰어났다. 익숙한 해결방략이 필요한 문제에서는 성차가 적었으며 도리어 여학생이 우세했다. Byrnes와 Takahira(1993)은 일반학생들을 대상으로 SAT-M을 푸는데 필요한 절차에서 성차가 있음을 밝혔고, Gallagher와 Lisi(1994)는 수리능력 우수아를 대상으로 think aloud기법을 사용하여 수리문제의 해결방식에 성차가 있음을 밝였다. 그들에 따르면 여학생은 관습적인 해결방식에서 우세한 반면 남학생은 비관습적인 해결방식을 요하는 문제를 여학생에 비해 잘 푸는 것으로 나타났다.

Fennema와 Tartre(1985)는 수학에서 공간시각화(spatial visualization)사용에서의 성차를 살펴본 결과 여학생은 남학생에 비해 그림을 그리려는 경향이 높았다. 그러나 그런 시도가 정확한 수행을 보장하지는 않았다. 즉 여학생의 경우 공간시각화를 많이 사용하기는 하였으나 그 수준이 낮아 수학문제의 해결력을 약화시킨다고 했다

Battista(1990)는 기하문제를 풀 때 어떤 전략을 사용하는 지를 고등학생을 대상으로 알아보았다. 그 결과, 남학생은 그리지 않고 시각화하기(visualization without drawing)전략을 많이 사용하고 그림그리기(drawing)전략은 적게 사용하는데 비해 여학생은 그리기 전략을 많이 사용하고 그리지 않고 시각화하기를 적게 사용하였다. 이는 남학생이 여학생보다 우세한 공간능력을 갖고

있기 때문이라고 지적하였다.

우리나라의 학생을 대상으로 한 연구를 살펴보면, 이종구(1996)는 문제해결기능 측정을 위한 평가도구를 이용하여 중학생의 문제해결력을 측정 분석하였다. 그 결과에 따르면 문제해결력 총점에서 남학생과 여학생에 비해 유의하게 높았다. 전략의 선택, 검토 및 확장 단계에서는 성차가 없었으나, 문제의 이해와 해결단계에서는 남학생이 여학생보다 유의하게 높은 해결력을 보였다.

백한미(1997)는 고등학교 1학년 학생을 대상으로 수학 문제해결 전략의 선택에 있어서의 전반적 성차를 살펴보았다. 그러나 많은 학생들은 연구과제인 주관식 수학문제 10문항에서 매우 유사한 문제제풀이의 경향을 보임으로서 다양한 문제해결전략의 확인을 하지는 못했다. 이런 제약에도 불구하고 밝혀진 결과들은 다음과 같았다. 첫째, 수학 문제해결 전략의 선택에 있어서 전반적 성차는 나타나지 않았다. 둘째, 문항별로 정답자가 문제를 풀기 위해 사용한 모든 전략인 정답전략에서도 통계적으로 유의한 성차는 나타나지 않았으나 남학생은 식 세우기와 규칙성 찾기 전략을 많이 사용하였고 여학생은 그림 그리기 전략과 거꾸로 풀기 전략을 많이 사용하는 경향을 보였다. 셋째, 문항별로 정답자가 정답을 이끌어내기 직적에 사용한 전략인 주 전략의 선택에 있어서도 유의한 성차는 나타나지 않았으나 남학생은 예상과 확인 전략, 식 세우기 전략을 여학생보다 더 많이 사용하는 경향을 나타냈다. 넷째, 문항별로 문제를 풀기 위해 처음 시도한 전략인 시작 전략의 선택에 있어서는 유의한 성차가 나타났다. 이는 전략의 선호도를 반영하는 것인데 여학생은 남학생에 비해 식 세우기 전략을 선호하는 경향을 보였다. 다섯째, 수학 문제해결 전략 선택의 태도에 있어서는 문제해결력이 떨어짐에도 불구하고 전반적으로 여학생이 남학생에 비해 적극적으로 나타났다. 이는 여학생의 메타-인지적 관점이 부족함을 반영한다.

최성주(1997)는 고등학교 2학년으로 수리 능력이 상위권에 드는 학생을 대상으로 수리와 관련된 귀납적 추론 문제에 접근하는 풀이 방식에서의 성차를 분석하였다. 그 결과 다음과 같은 결과를 얻었다. 첫째, 여학생은 순차적 대입에 의해 규칙을 알아낼 때 까지 끈기를 가지고 접근하지만 남학생은 이런 식이 반복 대입을 귀찮아하며 가능하면 식의 계산없이 그 뒤에 숨겨진 연결고리를 찾고자 한다. 둘째, 남학생이 여학생보다 문제풀이 자체를 즐긴다. 셋째, 도형 관련 문제에서 여학생들의 문제 기피 현상이 뚜렷하다. 넷째, 남학생은 직관적이며 연역적 추론 방식으로 문제에 접근하고 여학생은 순차적인 알고리즘적 사고 방식으로 접근한다.

Miller의 일반적 수리발달 모델 적용

수리능력의 성차를 설명하기 위한 인지적 접근 중 문제유형에 따른 성차와 문제해결 전략에서의 성차를 살펴보았다. 이제 이를 수리능력의 구성요소로서의 문제분석에 초점을 맞추어 재설명하고자 한다. 우선 문제 유형에 따른 성차에 관한 연구를 종합해보자.

문제 유형에 따른 성차에 관한 외국 연구에 따르면 남학생은 기하문제, 문장제 문제와 같이 잘 정의되는 않는 문제에서 여학생보다 더 높은 점수를 받았고 여학생은 연산문제, 수식과 같이 풀고자 하는 문제 파악이 잘 정의된 문제를 잘했다(Kimball, 1989; Armstrong, 1985; Dossey et al., 1988). 우리나라학생은 대상으로 한 연구에서는 남학생은 공간화 능력을 필요로 하는 기하문제를 잘풀고 추론이나 다단계 문제풀이와 같은 높은 수준의 문제해결을 잘했고(권오남, 박경미, 1995), 공간요인과 추론요인에서 여학생보다 우세를 보였으며(이혜경, 한태식, 1995) 조숙자(1996)의 연구에서는 남학생은 여학생에 비해 도형, 측

도, 수, 적용, 문제해결에서 우세를 보였다. 이에 비해 여학생은 계산과 같은 낮은 인지단계의 문제해결에서, 수와 식의 연산, 지식 및 이해영역에서 우세를 보였다. 이와 같은 결과를 종합해보면 기하영역에서는 남학생이 연산영역에서는 여학생이 우세하다는 Kimball의 결과로 좁혀질 수 있다.

문제해결 방안에서의 성차에 관한 외국연구의 결과에 따르면 여학생은 익숙한 해결방략이 필요한 문제에서 우세했고(Gallagher, 1990, 1992), 또한 관습적인 해결방식에서 우세했다(Gallagher & Lisi, 1994). 반면 남학생은 비관습적인 해결방식을 잘했고(Gallergher, 1990, 1992), 여학생에 비해 공간시각화를 사용하여 문제를 해결하려는 시도를 많이 했으며(Fennema & Tarter, 1985), 기하문제를 풀 때 그지지 않고 시각화하기 전략을 많이 사용하여 그림그리기 전략을 많이 사용하는 여학생과 대조를 보였다(Battista, 1990). 우리나라 연구에서 밝혀진 바에 따르면, 남학생은 문제의 이해와 해결단계에서 여학생에 비해 높은 해결적을 보였으며(이종구, 1996), 남학생은 귀납문제에서 순차적 대입을 싫어하며 직관적이고 연역적 추론 방식으로 문제에 접근하였다(최성주, 1997). 반면 여학생은 시작 전략에서 식 새우기 전략을 선호하였고(백한미, 1997), 귀납문제에서 여학생은 순차적 대입에 의해 규칙을 알아낼 때까지 끈기를 갖고 접근하였으며 여학생은 순차적 알고리즘적 사고 방식으로 문제에 접근하였다(최성주, 1997). 이와 같은 결과를 종합해 보면 남학생은 기하문제해결전략에서 공간시각화를 이용하였으며 비관습적, 직관적, 연역적 추론 방식의 해결전략을 선호한다고 볼 수 있다. 반면 여학생은 식 세우기, 순차적 대입, 순차적 알고리즘적 사고 방식과 같이 관습적인 해결전략을 선호한다고 볼 수 있다.

위의 연구들은 연구를 수행하기 위하여 수리능력과 관련된 자체 문항을 제작하거나, 표준화된 검사 문항을 이용하였고 각기 대상 연령도 달랐다. 그러므로 표면적으로 비교적 일관된 결과를 보인다하더라도 그것은 상이한 문제에 따른 상이한 연령수준의 결과라는 점에서 그리 신뢰롭고 일관된 성차라고 보기는 어렵다. 이에 본 논문에서는 수리능력의 성차에 관한 결론을 얻기 위한 방안을 제시함으로서 문항 및 연령에 따른 각기 다른 결과를 통합할 수 있는 방법을 이론적으로 검토해보고자 한다. 이를 위하여 Miller(1996)가 제안한 수리 능력 발달의 일반적 틀을 기초로 상징적, 연산적, 개념적 발달 및 그 상호작용을 수리 능력의 발달과 성차를 설명하기 위한 모델로 검토해보고자 한다. 우선 산수에서의 일반적 모델 적용 예를 살펴보고 기존의 연구에서 가장 큰 성차를 보이는 것으로 밝혀진 기하와 대수의 영역을 일반 모델로서 검토해보자.

산수(arithmetic)에서의 일반 모델 적용

<u>산수의 연산적 측면</u>

산수적 조작의 습득과 사용 역시 개념적, 연산적, 상징적 능력의 조화와 숙달이 필요하다. 먼저 산수의 연산적 측면을 살펴보다. 두 개의 한자리 수에 대한 조작을 연구한 지난 20년간의 연구에 따르면 어린 아동들은 기발한 방법으로 덧셈과 뺄셈을 할 뿐 아니라 문제에 대한 답을 내기 위하여 이미 알고 있는 답으로부터 즉각적 인출에 의존하는 경향이 점차 커진다는 것이 밝혀졌다. 실제로 아동이 단순한 산수를 풀기 위하여 사용하는 방법은 다양하다. * 직접적인 인출에 의해 합을 구하기 * 관련되는 문제에 대한 답으로부터 답을 재구성하기 (예; 6+5를 하기 위해 아는 답인 5+5를 이용하기) *덧셈을 하기 위하여 더하는 수 만큼을 더해지는 수에서 세기 (예; 6+5를 하기 위하여 7, 8, 9, 10, 11이라고 말하기 * 모든 더해서는 수를 세기. 이와 같은 방법이 덧셈을 하기 위해 사용된다. 곱셈을 하기 위해서도 *기

억으로부터 답을 직접 인출하기 * 아는 답으로부터 재구성하기(예; 6 x 4=24, 그러므로 7 x 4 는 24에다 4를 더한 것) * 답을 내기 위하여 덧셈을 반복하기(예; 6 x 4= 6+6+6+6) * 구구단에서 세기 (예; 6 x 4= 6, 12, 18, 24)와 같은 방법들이 사용된다. 이런 다양한 방법 중에서 아동은 점차 효과적인 방법을 선택하게 된다. 초등학교 3학년 때 까지의 덧셈 전략을 살펴본 종단연구에 의하며 점차 모두 세기 전략은 감소하고 직접 인출 전략과 더해지는 숫자로부터 세기 전략이 증가하는 것으로 밝혀지기도 했다.

아동이 다른 산술적 조작을 익히기 시작할 때 아동의 덧셈은 간섭을 받기 때문에 직접 인출이 증가한다는 원인을 밝힌 연구가 있다. Miller 와 Paredes(1990)는 아동의 덧셈 학습에서부터 곱셈에 이르기까지의 과정을 종단 연구한 결과, 곱셈을 하게 됨에 따라 조작 간의 실수가 극적으로 증가하고(특히 덧셈에서 합을 해야할 것을 곱을 내는 것에서), 덧셈의 속도가 느려지는 것으로 나타났다. 이런 결과는 아동이 좀 더 복잡한 계산적 방법을 발달시킴에 따라 기존에 숙달된 능력과 새로운 지식이 합쳐지면서 수리 발달에 큰 도전을 받는 점을 시사한다.

<u>산수의 개념적 측면</u>

연구가 증가함에 따라 문제 상황에 대한 아동의 기본 개념적 표상이 성공적 문제풀이에 중요한 역할을 한다는 점이 밝혀지고 있다. 다음 문제를 살펴보자. 둘 중 어떤 문제가 더 어려운가? a. 철수는 미니카 9대를 갖고 있는데 영수가 5대를 더 주었다. 철수는 지금 몇 대의 미니카를 갖고 있는가? b. 철수는 미니카 몇대를 갖고 있는데 영수가 5대를 더 줘서 지금 14대가 되었다. 원래 철수는 몇대를 갖고 있었는가? 두문제는 같은 물리적 상황을 다른 문장제 문제로 바꾼 것이다. 그러나 a 문제는 문장의 후반을 미지로 남겨놓고 b 문제는 초반을 미지로 남겨놓았다는 점에서 다르다. a 보다는 b를 더 어렵게 느끼는데 이는 문제의 초반에 미지항이 나오는 것을 추론하기가 더 어렵기 때문이다.

아동들은 점차 문제 상황의 특수한 개념적 표상에 덜 관련된 문제 표상과 연산을 발달시킨다. 이런 과정의 발달에서 성공적인 문제해결의 방해가 되는 것들이 생긴다. 이는 아동들이 문제를 대충 파악하고, 편리하기는 하지는 이치에 맞지 않는 방법으로 수를 연결시키기 때문이다. 다음 문제를 살펴보자. 한 양치기가 125마리의 양과 5마리의 개를 갖고 있다. 양치기는 몇살인가? 여기서 125와 5의 산술적 조작은 양치기의 나이를 알아내는데 아무 도움이 되지 않는다. 그럼에도 아동들은 125÷5를 한 결과를 양치기의 나이로 계산하는 오류를 범한다.

<u>산수의 상징적 측면</u>

산수는 기본적으로 아라비아 숫자와 관습적인 산술적 조작을 사용한다. 아라비아 숫자는 10을 법으로 하기 때문에 산술적 연산의 적용이 매우 간단하다. 이런 사실은 다음과 같은 예를 통해 쉽게 확인할 수 있다.

XXVII	27	二十七	twenty-seven
+ XIV	+ 14	+ 十四	+ fourteen

위는 같은 형식의 덧셈을 로마자, 아라비아숫자, 한자, 영어로 표현한 것이다. 아라비아 숫자는 분명히 10을 법으로 했기 때문에 각 자릿수에 쓰여진 숫자를 더하는 것 만으로 문제가 해결되므로 덧셈이 쉽다. 그러나 로마자로 표현된 덧셈문제는 좀 더 어렵다. 여기서 덧셈을 하기 위해서는 상징을 이해해야 한다. 윗줄 처음의 두 상징과 아랫줄의 첫 상징은 십의 자리수를 나타낸다. 또한 5 언저리에 있는 숫자를 알아내기 위해서는 상징을 해석해야 한다. 영어의 알파벳으로 표현

된 덧셈에서는 숫자를 십자리와 일자리로 분해해서 나타낸다. 그러나 그 과정에서 혼란이 생긴다. 위의 예에서 윗줄의 처음 요소(twenty)는 십의 자리수를 나타내는 반면 아래줄의 처음 요소(four)는 일의 자리수를 나타낸다. 한자에서는 이런 문제가 해결된다. 한자 예의 첫줄은 'two ten seven'로 아래줄은 'ten four'로 문자 그대로 읽힐 수 있다. 십자리의 각 숫자는 자리수를 나타내는 부분(ten)과 십자리의 개수(하나 이상일 경우)를 나타내는 부분으로 구성되면 마지막 상징은 일의 자리를 나타낸다.

이런 상징의 상이함이 아동의 계산에 영향을 미치는가? Paredes(1993)의 연구는 그 효과를 알아보고 있다. 미국과 중국의 2,3,4학년 아동을 대상으로 한자리 또는 두자리 숫자의 덧셈문제를 아라비아 숫자와 자국 문자로 표현하여 그 수행을 비교하였다. 예상대로 모든 연령과 조건에서 중국학생들이 더 잘했다. 또한 각 문자로 표현된 대안적인 덧셈과정에서는 아라비아 숫자의 덧셈에서는 일어나지 않는 오류의 패턴이 나타났고 이는 각 문자 덧셈에 대해서도 아라비아 숫자에 적용하는 연산을 하려는 시도가 반영된 것이다. 미국의 아동이 자주 보이는 실수 패턴은 위의 예에서 영어의 알파벳으로 표현된 덧셈을 할 때 답을 68로 내는 것이다. 이는 자릿수를 혼동하여 아래줄의 four를 십의 자리로 잘못 해석해서 생기는 오류이다. 이에 반해 중국 아동은 위의 예에서 한자로 표현된 덧셈을 할 때 답을 231로 내는 실수를 많이한다. 이는 첫줄을 217로 잘못 해석해서 생기는 오류이다. 미국 아동에 비해 중국 아동이 수행이 좋은 이유는 한자의 숫자 표상이 영어의 알파벳 표상보다 십진법을 택하는 아라비아 숫자 표상과 더 유사하기 때문이라고 본다(Miller, 1996에서 재인용).

기하와 대수에서의 일반 모델 적용

산수의 여러 문제들을 개념, 상징, 연산의 측면으로 분해할 수 있듯이 성차가 가장 크게 나타나는 기하와 대수 등과 같은 수리 문제도 같은 방식으로 분해할 수 있다고 본다. 이제 Miller의 일반 모델을 기하와 대수에 적용시켜 보자. 우선 상징적 능력을 살펴보자. 상징적 능력이란 수표상 및 산술부호와 같은 상징적 기호의 세트를 숙달하는 것이다. 수학에서는 기본적으로 숫자라는 상징을 사용한다. 이에 더하며 기하에서는 ∠ABC, △ABC, ≡, ↔, ⊥, 〃 등의 의미를 알아야 하며, 대수에서는 ±, ×, ∓, ≤, ∞, √, ∈, ∉,Σ 등의 기호 의미를 알아야 한다. 물론 이런 기호는 사회적 합의에 의해 결정된 상징들이다. 수리능력의 발달에서 처음부터 이런 부호에 대한 이해가 필요하지는 않다. 그러나 수리능력이 발달함에 따라 공용의 상징체계로서 수리적 지식을 받아들이고 이를 사용하는 것은 매우 기본이 된다.

연산적 능력은 산수, 측도, 문제해결과 같은 과정에 이용되는 연산과 기법이다. 연산은 절차적이다. 또한 어떤 연산적 절차를 사용할지를 결정하는 기법은 문제해결 전략이다. 각 문제에 대해 맥락에 맞는 전략을 선택하고 이에 따른 절차를 실행토록하는 것이 연산적 능력이다. 기하문제에서 ' x 축을 축으로 하여 y = x 와 y = 1.3x-2, x축에 의하여 둘러싸인 면적을 회전시켰을 때 이 입체의 체적을 구하라.' 와 같은 문제를 풀 때 문제에 대한 개념적 표상이 끝나면 이를 해결하기 위한 전략이 선택되고 선택된 전략을 실행하는 과정에서 연산적 절차를 밟는다. 대수문제에서의 연산의 필요성은 더 설명할 필요가 없을 정도이다.

개념적 능력은 수학적 개념을 습득하는 것으로 기하에서 합동과 닮음 개념, 평행이동과 대칭이동 개념 뿐 아니라 수학적 개념을 표현하는 수단으로서의 기하에 대한 이해도 포함된다. 예를 들어 수직선은 실수를 표현하기 위한 수단으로 이

용된다든지, 데카르트의 좌표 개념과 같은 것이다. 대수에서는 정수, 유리수, 실수, 복소수 등과 같이 수와 관련된 개념 뿐 아니라 다항식, 방정식, 합집합.행렬 등의 개념이 포함된다.

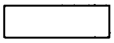
기하문제의 특성

Veblen은 기하를 두 영역으로 나누었는데 하나는 인간이 사고과정을 거쳐 만들어낸 기하의 내용(product of geometry)이며 다른 하나는 사고과정 자체인 기하의 과정(process of geometry)이다. 기하의 내용으로는 정리, 정의, 공리 등이 포함된다. 기하의 과정은 물리적 현상으로서의 데이터, 문제상황, 사건의 자료를 수집하기,관찰하기, 분류하기, 공식만들기, 기호화하기, 추상화하기 일반화하기, 가설세우기, 논리적 증명하기 등이 포함된다(김도상 외, 1990에서 재인용). 여기서 기하의 내용은 Miller의 개념능력에 대응 되는 것이며 기하의 과정은 연산에 대응된다. 또한 기하의 과정에는 기호화의 과정이 포함되는 데 이는 상징에 대응되는 부분이다. 전체적으로 기하 문제의 영역은 Miller의 일반 모델이 적용될 수 있음을 알 수 있다.

반힐(Van Hiele)은 기하개념의 이해를 5단계로 제시하였다. 수준 0은 영상(visualization)단계이다. 영상수준은 기하에 대해 가장 초보적인 이해수준으로 기하개념의 성질과 특징을 구분할 수 없어도 그림이나 구체적인 활동을 통해 개념을 전체로서 보는 단계이다. 이 수준에 있는 학생은 기하학적인 용어(삼각형, 다각형 등)나 도형을 인식할 수 있고 주어진 도형을 복사할 수도 있다. 수준1은 분석(analysis) 단계이다. 분석수준에서는 기하학적인 개념의 분석이 시작된다. 예를 들어 도형에는 부분들이 있고 이 부분들이 모여서 한 도형을 이룬다는 것을 인식한다. 그러므로 합동인 각을 골라낼 수 있고 평행사변형의 대변은 서로 평행하다는 것을 안다. 그러나 아직 명확한 수학적 정의는 내리지 못하므로 도형의 성질들간의 관계를 이해하지 못한다. 즉 정의를 이해함으로써 평행사변형에서 어떤 조건을 주면 직사각형이 되고 정사각형이 됨을 이해하기 어렵다. 수준2는 비형식적 연역(informal deduction)단계이다. 비형직적 추론 수준에 있는 학생들은 한 도형에서 존재하는 성질들의 관계를 파악한다. 예를 들어 평행사변형에서 대변이 서로 평행하게 됨에 따라 대각은 같다와 같은 관계를 이해하며 정사각형은 직사각형이 갖는 모든 성질을 만족하므로 직사각형임을 안다. 즉 도형의 성질을 추론할 수 있고 도형을 어떤 관점에서 분류할 수 있다. 이때 집합의 포함관계가 이해된다. 그러므로 수학적 정의가 이해되고 비형식적 논쟁(argument)이 가능하다. 그러나 수학의 공리론적 방법을 잘 이해하지 못하고 형식적 증명(formal proof)이 가능할 수도 있으나 가정에서 결론을 이끌어가는 논리적 순서를 잘 보지 못한다. 수준3은 형식적 연역(formal deduction)단계이다. 형식적 추론 수준에 있는 학생들은 공리론적 조직속에서 기하의 정리들을 세우는 방법의 하나인 추론을 이해한다. 무정의 용어, 공리, 정의, 정리 및 증명의 역할과 관계성을 알게된다. 수준4는 엄밀과정(rigor)으로서 고등학교 수준을 넘는 단계이다. 비유클리드 기하를 연구할 수 있고 기하의 여러 공리조직들 사이의 차이점을 비교할 수도 있다. 기하를 매우 추상적 수준에서 볼 수 있는 단계이다. 5단계는 순서적으로 발달하므로 특정한 수준에 도달하기 위해서는 전 수준을 거쳐야 한다. 반힐은 기하의 발달은 나이에 따른 성숙보다는 기하내용을 어떻게 잘 지도했는냐에 따른다고 했다. 따라서 수준0에 있는 학생들에게 수준2의 방법으로 지도하면 학습이 이루어지지 않고 발달도 이루어지지 않는다고 보았다(김도상 외, 1990에서 재인용).

반힐의 기하 개념의 이해는 기하 문제를 Miller의 모델에 따라 문제를 유형화할 때, 개념 능력

의 수준을 어떻게 구분 할 수 있는지를 보여준다. 만약 같은 기하 문제라도 남녀의 차이가 개념 능력의 차이 때문인지를 검토하고자 한다면 상징과 연산의 수준을 통제하고 개념 능력의 수준을 다양화 시켜 수행을 비교해 볼 수 있다. 반대로 개념의 수준을 고정시키고 다른 상징 체계를 이용하거나 연산의 수준을 달리하여 그 효과를 비교해 볼 수 있다. 다음의 예를 보자.

 은 어떤 도형인가? 어떻게 알았는가?

학생들은 첫 질문에 직사각형이라고 대답한다. (만약 대답하지 못하면 수준0에도 이르지 못한 것임) 두 번째 질문에 대해서는 학생의 수준에 따라 각기 다른 대답을 한다. 0수준의 학생은 문짝과 같이 보이기 때문이라는 영상적 수준에 기초한 대답을 하고, 수준1에 있는 학생은 변이 4개이고 닫혀있으며 긴 변이 두 개 짧은 변이 두 개이고 대변이 평행이고 4개의 직각이 있기 때문이라는 특성을 기술한다. 수준2에 있는 학생은 직각을 갖고 있는 평행사변형이기 때문에 직사각형이라고 답하고 수준3의 학생은 만일 그림이 평행사변형이고 한 각이 직각이면 나는 이를 직사각형이라고 증명할 수 있다며 연역적으로 증명하려고 한다(김도상 외, 1990에서 재인용). 위와 같은 문제를 통해 학생들의 특정 기하 개념에 관한 수준은 통제할 수 있다.

대수문제의 특성

대수는 합과 곱, 제급근과 지수, 미지수와 매개변수 등의 연산에서 출발한다. 대수학은 수 뿐아니라 다른 수학적 대상(순열, 수의 짝, 집합 등)에도 이런 연산이 적용된다는 전제하고 있다. 일반적으로 대수는 법칙의 덩어리라고 한다. 이 법칙의 덩어리는 간단한 법칙에서 출발하여 체계적으로 또 다른 법칙들을 증명해 가도록 배열되어 있다. 이제 가장 간단한 공리를 살펴봄으로서 제한적이나마 대수의 개념적, 연산적, 상징적 특성을 알아보기로 하자.

<u>상등의 공리</u>

수 사이의 상등의 공리는 가장 기본적이고 분명한 법칙이다. 예를 들어 a, b, c가 실수일 때,

반사율: $a = a$,

대칭률: $a = b$이면 $b = a$,

추이율: $a = b$이고 $b = c$이면, $a = c$.

위의 공리는 모든 수학적 대상에 대해서도 성립한다. 이를 적용하여

$a = b$ 이면 $a + c = b + c$,

$a = b$ 이면 $c + a = c + b$.

위의 식 중 앞의 것은 다음과 같은 언어적 문장 대신에 쓰는 대수적 방법이다 : 같은 것들(a =b)에 같은 것(c)를더하면 그 결과는 같다. 이와 같이 언어적 문장 대신 대수적 공리를 사용하면 단순하고 명쾌하게 표현된다. 이것이 대수가 갖는 상징적 표상이다. 대수는 일상의 것들을 숫자나 문자로 표상화하여 다룬다. 그런 점에서 대수에서 상징은 기본이다. 내가 갖고 있는 미니카 4개와 친구가 갖고 있는 미니카 4개는 a=b로 표현될 수 있고 이는 c=d, e=f 등 어떤 것이든지 임의적으로 대치될 수 있다. 이런 상태에서 선생님이 각 각 미니카 한 대씩을 더 주었을 때 a=b이면 a+c=b+c 로 현재의 상태를 나타낼 수 있다. 마찬가지로 임의적인 대치는 얼마든지 가능하다.

위의 반사율, 대칭률, 추이율과 위의 두식을 사용하면 다음과 같은 형식적 증명을 할 수 있다.

$a = b$,

$a + c = b + c$,

$c = d$,

$b + c = b + d$,

그러므로 $a + c = b + d$.

여기서는 연산의 절차를 통해 새로운 개념을 습득할 수 있음을 볼 수 있다. 첫줄의 대칭율에 대한 이해이고 둘째 줄에서 등식에 같은 것을 더해줘도 등식은 성립한다는 것을 연산의 과정을 통

해 보여주고 있다. 셋째 줄에서는 다시 대칭율이 등장하고 넷째 줄에선 추이율을 연산과정을 통해 보여주고 있다.

<u>수 이외의 대수</u>

다음과 같은 덧셈을 보자.

$8 + 7 = 3,\ \ 5 + 11 = 4,\ \ 6 + 7 = 1,$

$3 + 5 = 8,\ \ 11 + 10 = 9$

한편 뺄셈은

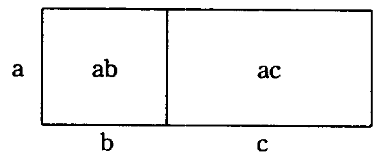
$8 - 5 = 3,\ \ 1 - 5 = 8,\ \ 9 - 10 = 11$

왜 이렇게 이상한 등식이 성립하는가? 여기서 더하는 것은 숫자가 아니라 시간이다. 예를 들어오전 8시에서 7시간 후면 오후 3시 (8+7 =3), 오전 1시보다 5시간 앞선 시각은 오후 8시 (1-5 =8)이다. 이렇게 이해하고 보면 등식이 전혀 이상하지 않다. 이와 같이 일상의 것들 중에선 수로 바꾸어 생각할 수 있는 것들이 많다. 위의 예는 12를 법으로 한 덧셈과 뺄셈이다. 12 이외에도 법으로 할 수 있는 수는 많다. 예를 들어 군대나 선박에서는 24를 법으로 한 연산을 쓰고 있으며 컴퓨터에서는 2를 법으로 한 연산을 쓴다. 어떠한 법을 선택하든 보통의 연산에서 성립하는 대수의 법칙들은 여전히 성립된다. 이 때 법에 대한 이해는 개념적 능력이며 이를 수라는 상징으로 표현한 것이 사고의 도구로서 사용이 된 것이다.

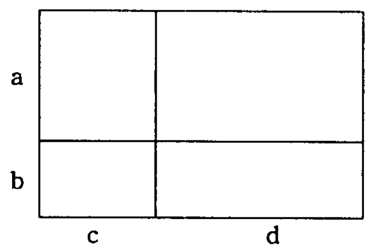
기하와 대수의 명확한 구분이 가능한가?

기하와 대수의 특징을 개념, 연산, 상징의 능력으로 구분했을 때, 이는 문제의 유형이나 문제해결의 절차로서 구분되기 보다는 인지적 능력으로서 구분되는 것이다. 또한 기하와 대수가 생각처럼 그렇게 뚜렷이 구분되는지에 대해서도 생각해 볼 여지가 있다.

수리능력 중 문제 유형에 따라 문제해결 전략에 따라 가장 성차가 뚜렷하게 드러나는 부분이 기하와 대수문제이다. 그러나 기하와 대수가 문제 자체로서 극명하게 구별되는지에 대해서는 다시 생각해봐야 한다. 우선 기하의 대수분야에의 응용을 살펴보자. 우리는 기하를 활용하여 대수에서 나오는 복잡한 수학적 개념을 쉽게 이해하는 경우를 자주 본다. 예를 들어 덧셈에 대한 곱셈의 배분법칙을 이해하기 위하며 기하를 활용하여 설명한다. 이 법칙은 $a(b+c)=ab+ac$ 인 규칙을 전개방법으로 설명하지만 다음 그림과 같이 두 개의 직사각형 면적을 이용하여 배분법칙의 의미를 설명할 수 있다.



또한 이항연산 즉 두 다항식의 곱 $(a+b)(c+d)$은 직사각형의 면적을 이용하여 직관적으로 그 의미를 전달할 수 있다.



$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

위에서도 알 수 있듯이 대수의 배분법칙과 이항연산의 개념을 이해하기 위해 사용되는 연산의 절차가 기하에서는 영상화 수준과 면적의 개념으로 바뀐다. 이럴 때 초점은 기하와 대수라는 영역간의 차이가 아니라 개념의 유무가 된다. 비슷한 예를 대수에서도 찾을 수 있다.

대수의 기하분야에의 응용은 변환(transformation)에서 잘 드러난다. 예를 들어 집합 X의 원소 a 를 유일한 X의 한 원소 T(a)로

대응시키는 함수 T: X→X를 X의 변환이라고 한다면 X의 변환은 X위에서의 함수를 뜻한다. T(a)가 유일하다는 것은 a=b 이면 T(a)=T(b)라는 의미이다. 이는 기하에 응용하면, 평면위의 한점을 중심으로 60° 만큼 회전하는 R 은 X의 변환이다. 회전 R은 각 점 p를 p로부터 60°회전한 R(p)점으로 이동시킨다. 마찬가지로 평면 위에서 3 cm 위로 옮기는 변환 T는 각 점 p를 3 cm 위의 T(p)로 옮기는 변환이다. 변환을 설명하기 위한 대수적인 방법은 함수의 기호화이다. 변환을 설명하기 위한 기하적인 방법 역시 좌표를 이용하여 각도를 회전하거나 위치를 변경시키는 절차를 기호화하는 것이다. 이 역시 대수와 기하의 영역간의 차이보다는 기호화 성공 여부 즉 상징화의 여부가 중요하다.

종합 및 결론

인지능력에 관한 고정관념은 남성과 여성의 생활의 장을 바뀌게 할 만큼 강력한 힘을 갖고 있다. 지금까지 인지능력의 성차에 관한 연구들에 따르면 수리능력은 공간능력과 함께 여성이 뒤지는 것으로 나타났다. 특히 수리능력에 관한 성차는 학교의 학업 성취에서 여학생의 열세가 경험적으로 확인되고 있다. 이런 성차가 왜 생기는가에 대한 기존의 설명 방식으로 대표적인 것인 생물학적 설명과 환경적 설명이다. 남성과 여성은 생리적 구조나 기능이 차이가 나며 이것이 인지능력에서의 성차를 일으킨다고 보는 생물학적 설명은 구체적인 자료를 통해 성차를 증명한다는 점에서는 설득력이 있으나 성차가 가져올 수 있는 불균형과 불평등을 해소할 수 있는 방안을 제시하지 못하고 있다. 또한 과연 생물학적인 것은 고정적이고 불변하는가에 대한 전제도 최근의 연구 결과 위협받고 있다. 이에 비해 환경적 설명은 추상적이기는 하지만 남녀의 인지능력에 대한 기대, 동기, 귀인패턴, 자기효능감 등의 환경적 요인 바뀌면 성차는 해소될 수 있다고 전제한다는 점에서 희망적이기는 하지만 어떻게 기대, 동기, 귀인패턴, 자기효능감 등을 변화시킬 것인가? 또한 더 큰 환경적 요인으로서의 성이분화된 사회를 어떻게 변화시킬 것인가에 대해서는 구체적이지도 명확하지도 못하다는 점에서 역시 제한점을 갖고 있다.

이에 본 논문에서는 수리능력의 성차를 설명하기 위한 대안적인 설명방식을 인지발달적 접근에서 찾고자 했다. 세기능력을 구성하는 여러 하부요인들이 있고 이에 대한 여러 설명 모델들이 있음을 기초로 Miller는 수리능력의 발달에 관한 일반적 모델을 제안하였다. 그에 따르면 수리능력은 개념적 능력, 연산적 능력, 상징적 능력으로 나눌 수 있으며 수리능력이 발달하기 위해서는 이들의 상호작용이 일어나야 한다. Miller의 일반 모델을 수리능력에 적용하기에 앞서 수리능력의 성차를 문제의 유형과 문제해결 전략이라는 인지적 측면에서 살펴본 연구들을 검토하였다. 그 결과, 남학생과 여학생은 기하와 대수 영역에서 가장 큰 차이를 보였다. 그렇다면 가장 큰 성차를 보이는 기하와 대수에 Miller의 일반 모델이 적용될 수 있는 가능성을 있는가? 이를 위하여 우선 산수를 일반 모델에 적용시켜 개념적, 연산적, 상징적 능력이 어떤 식으로 구분되는 지를 알아 보았다.

기하와 대수에 수리 일반 모델이 적용될 수 있는지 가능성을 알아본 결과 기하와 대수문제는 개념, 연산, 상징의 세 하위 능력요소로 나누어 분석할 수 있었다. 기하와 대수의 내용으로서 개념 획득은 수리능력의 평가에서 가장 초점이 맞추어지는 부분이다. 직사각형, 면적, 합동, 유리수, 복소수, 방정식 등의 개념을 이해를 수리능력의 기본이라고 본다. 그러나 이런 이해에 도달하기 위해서 사용되는 것이 각종 상징들이다. 기본적으로 수라는 상징을 다루는 수리에는 이외에도 기하 및 대수에서 상태나 절차를 나타내기 위하

여 사용되는 여러 상징이 있다. 이런 상징을 해석해내고 사용할 수 있는 상징적 능력없이는 개념 형성은 미완의 상태로 머무른다. 자신이 알고 있는 개념을 타인에게 전달할 때 수나 부호에 대한 상징은 필수적이다. 타인의 수리적 개념을 수용할 때 역시 그 수단은 상징을 통해서 이다. 그러므로 수리능력의 하위 발달 요인으로서 상징적 능력은 지대한 힘을 지닌다. 연산적 능력은 대수는 물론 기하에서도 절차로서 매우 중요한 역할을 한다. 연산에 대한 절차 및 기법은 개념이 상징으로 표현된 것을 실행시킬 때 필수적인 능력이라고 본다. 문제에 따라 어떤 절차를 밟아야 하는지에 대해 아는 것은 수리문제 풀이의 핵심적 내용이다. 이런 점에서 연산적 능력은 문재해결 전략과 일맥상통한다. 전략 선택은 문제 상황에 따라 달라지듯 연산적 능력에는 절차적 지식 뿐 아니라 맥락적 지식이 포함된다고 볼 수 있다. 기하와 대수에는 분명한 연산적 절차가 존재한다. 이러한 하위능력들이 상호작용을 함으로서 기하와 대수을 풀 수 있고 궁극적으로 수리능력이 발달한다.

수리능력에 관한 인지발달적 모델은 수리능력을 진단할 수 있다. 그러므로 수리능력에서 열세를 보이는 학생의 약점이 구체적으로 밝혀질 수 있을 것이라고 본다. 수학과목에서 낮은 점수를 보이는 것이 인지적 능력 면에서 개념적 능력이 부족한 것인지, 연산적 절차를 못찾는 것인지 아니면 기호나 부호와 같은 상징을 파악하지 못하기 때문인지를 진단할 수 있을 뿐 아니라 이 세 하위능력의 통합에서 무엇이 문제가 되는지를 알 수 있을 것이다. 이런 진단이 끝나면 그런 학생을 위해 어떤 도움을 줄 수 있는지가 비교적 구체적으로 밝혀지리라고 본다. 개념적 능력이 부족한 학생을 위한 도움은 연산적 절차능력이 부족한 학생을 위한 도움 행동과는 상당히 다를 것이다. 하위능력은 떨어지지 않지만 세요소를 통합하지 못하는 학생들을 위한 도움 역시 다른 모습을 띨 것이다.

전반적으로 수리능력에서 열세를 보이는 여학생에 대해 생물학적 설명은 처방을 내리지 못하고 차이를 고정적인 것으로 받아들인다는 점에서 교육적인 시사점을 찾기 어렵다. 반면 환경적 설명은 수리능력의 불균형을 환경의 변화를 통해 해소할 수 있다고는 하지만 어떻게 추상적 환경 요인을 변화시킬 것인가를 제시하지는 못한다. 반면 인지발달적 설명은 수리능력을 하위요소로 나누고 그 세요소가 상호작용하여 통합되는 것을 수리발달의 모델로 보기 때문에 여학생의 수리문제 해결에서의 약점을 잡아낼 수 있을 뿐 아니라 적절한 교육적 처치를 가능하게 하리라고 본다.

그런 점에서 지금 한창 진행되고 있는 수리능력의 성차에 관한 인지발달적 접근 방식이 단순히 문제 유형이나 해결책략 측면 뿐 아니라 수리능력의 전체적 모습을 볼 수 있는 일반적 내용을 포함시키길 제안하는 바이다. 예를 들어 기하에서 열세를 보이는 여학생을 위하여 기하를 보충한다 하여 수리능력의 불균형이 해소되리라고는 보지 않는다. 기하문제를 대하는 과정어디에 결점이 있는지를 파악하는 것이 훨씬 더 구체적인 교육적 시사를 주리라고 본다.

참고 문헌

권오남, 박경미 (1995). 수학성취도에 있어서의 성별차이에 관한 고찰, **한국여성학**, 제11집 한국여성학회 202-232.

김도상 외 공저 (1990). **수학과교재론**. 서울:경문사.

박영미 (1990). 문제해결의 지도에서 풀이전략 (heuristics)에 따른 문제 유형의 분류에 관한 연구. 이화여대 교육대학원 석사학위 논문.

백한미 (1997). 수학 문제해결 전략 선택에 있어서의 성별 차이에 관한 연구-고등학교 1

학년 학생을 중심으로- 이화여대 교육대학원 석사학위논문.

이혜경, 한태식 (1995). 수학적 능력에서의 성 차이에 관한 연구. **대한수학교육학회 논문집**, 제 5권 제2호 143-154.

조숙자 (1996). 학업성취도 평가에 나타난 수리능력에서의 성차에 관한 논의. **한국여성심리연구회지**, 제1권, 76-88.

조숙자 (1996). 인지능력의 발달과 성차. **여성심리**. 김태련외 공저. 이화여대출판부.

최성주 (1997). 귀납적 추론 문제에 대한 남녀학생간의 문제접근 방식 비교. 이화여대 교육대학원 석사학위논문.

Antell, S. E., & Keating, D. P. (1983). Perception of numerical invariance in neonates. *Child Develpment,* 54, 695-701.

Battista, M. T. (1990). Spatial visualization and gender differences in high school geometry. *Journal for Research in mathematics education,* Vol. 21, No. 1, 47-60.

Benbow, C. P., & Stanley, J. C. (1980). Sex differences in mathematical ability: fact or artifact? *Science,* 210, 1262-1264.

Bornstein, M. H. (1985). Infant into adult: Unity to diversity in the development of visual categorization. In J. Mehler and R. Fox (Eds.), *Neonate cognition*: Beyond the blooming buzzing confusion. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Crawford, M. (1997). Agreeing to differ: Femimst epistemologies and woman's ways of knowing. In M. M. Gergen, & S. N. Davis (Eds.). *Toward a New Psychology of Gender.* New York: Routledge. 267-284.

Chang, F. L., & Greenough, W. T. (1984). Transient and enduring morphological correlates of synaptic activity and efficacy change in the rat hippocampal slice. *Brain Research,* 309, 35-46.

Fennema, E., & Tartre, L. A. (1985). The use of spatial visualization in mathematics by girls and boys. *Journal for Research in Mathmatics Education,* 16 , 3, 184-206.

Ferrara, R. A., & Turner, T. (1993). The structure of early counting competence. *Bulletin of The Psychonomic Society,* 31, 257-260.

Gallagher, A. M., & Lisi, R. D. (1944). Gender differences in scholatic aptitede test mathmatics problem solving among high-ablity students. *Journal of Eucational psychology*, 86, 2, 204-211.

Greeno, J. G., Riley, M. S., & Gelman, R. (1984). Conceptal competence and children's counting. *Cognitive Psychology*, 16, 94-143.

Greenough, W. T., Black, J. E., & Wallace, C. S. (1987). Experience and brain development. *Child Development,* 58, 539-559.

Kimball, M. M. (1989). A new perspective on woman's math achivement. *Psychological Bulletin,* 105, 2, 198-214.

Miller, K. F. (1996). Origins of quantitative competence. In R. Gelman, & T. Au,(Eds.). *Perceptual and Cognitive Development.* Academic Press. p213-241.

Explanatory model for development and sex difference of mathematics : the need for cognitive developmental approach

Sook-Ja Cho
Department of Educational Psychology
Ewha Womans University

The purpose of this study was to examine the limitations of traditional explanations for development and sex differences in mathematics, and to suggest the cognitive developmetal approach as an alternative. In this study, the characteristics of Miller's model as a general framwork for mathematical development were inquired and the possibility that Miller's model is an explanatory model for sex difference in mathematics was examined. The result indicates that all mathematics problems, including geometry and algebra problems can be divided by conceptual, algorithmic and symbolic competence as Miller suggeted. The cognitive developmental approach will help contribute to the decrease in the gender unbalance in mathemetics.