J. Korean Soc. Math. Edu. Ser. B: Theoretical Math. Pedagogical Math.
https://doi.org/10.7468/jksmeb.2025.32.2.113 ISSN(Print) 3059-0604
Volume 32, Number 2 (May 2025), Pages 113–137 ISSN(Online) 3059-1309

원뿔의 절단으로서의 타원, 쌍곡선, 포물선의 유도
A DERIVATION OF THE ELLIPSE, HYPERBOLA, AND PARABOLA AS CONIC SECTIONS

한인기 [a]

Abstract. This study examines historical approaches to deriving conic sections-ellipse, hyperbola, and parabola-as intersections of a cone and a plane. Focusing on two early 20th-century textbooks from the Real Gymnasium, it analyzes the mathematical knowledge and proof methods used in each. By comparing different approaches and tools, the study provides a systematic understanding of how conic sections were logically derived. The findings offer insights into teaching analytic geometry in secondary education through historically grounded methods.

1. 서론

원뿔을 평면으로 절단하여 타원, 쌍곡선, 포물선 등을 얻을 수 있다는 사실은 직접적인 활동을 통해 수학적 개념(곡선)이 만들어지는 흥미로운 예가 될 수 있을 것이다. 이처럼 직접적인 활동을 통해 곡선을 얻는 사례들은 수학사에서 종종 찾아볼 수 있다. 예를 들어, 임의의 각의 3등분 문제와 원적문제의 해결에 관련된 원적곡선(Quadratrix)은 정사각형에서 변의 이동과 회전을 통해 만들어지며([4]), 배적문제와 임의의 각의 3등분 문제의 해결에 사용된 콘코이드 곡선, 아르키메데스 나선 등도 직관적인 활동과 관련하여 만들 수 있는 곡선들이다.

실제로, 중등학교 수학 교과서, 수학 참고서 등에서 원뿔을 평면으로 잘라 타원, 쌍곡선, 포물선을 얻는 그림을 쉽게 볼 수 있지만, 원뿔을 자르는 활동을 통해 타원, 쌍곡선, 포물선을 유도하는 수학적 과정을 논리적으로 설명하는 교과용 자료들은 찾기가 쉽지 않다. 특히, 고등학교 '기하'에서는 타원, 쌍곡선, 포물선을 원뿔의 절단으로서 다루지 않고, 두 초점으로부터의 거리, 초점과 준선으로부터의 거리를 이용하여 정의하고 그

Received by the editors April 13, 2025. Accepted May 8, 2025.
2020 *Mathematics Subject Classification.*97G30, 97U30.
Key words and phrases. Conic sections, Cone-plane intersection, Dandelin sphere, Proof methods
주요어: 원뿔곡선, 절단 평면, 단델린의 구, 증명 방법

방정식을 유도하기 때문에, 원뿔의 절단으로서의 타원, 쌍곡선, 포물선에 대한 직관적 이해와 교과서의 설명사이에는 틈이 존재할 수밖에 없다.

국내외 연구들을 조사하면, 원뿔의 절단으로서 타원, 쌍곡선, 포물선을 유도하려는 시도들을 찾아볼 수 있다. 국내 연구들로 [7]은 원뿔의 절단을 통해 얻어진 타원, 쌍곡선, 포물선의 점들에 대해 각각 두 초점으로부터의 거리의 합이 같다, 차가 같다, 초점과 준선으로부터의 거리가 같다는 것을 유도하였고, [10], [11], [12]에서는 타원의 점들에 대해 두 초점으로부터 거리의 합이 같다는 것을 유도하였다. 그리고 이들과 유사한 외국의 연구들로 [2], [6] 등을 포함하여 다양하게 찾아볼 수 있다. 이 연구들에서는 타원, 쌍곡선, 포물선이 원뿔의 절단으로서 얻어진다는 것을 증명하기 위해, 대부분 원뿔과 절단평면에 접하는 단델린(Dandelin, 1794−1847)의 구를 이용하고 있다. 단델린의 구를 이용한 증명은 증명 과정의 간결함으로 인해, 전공서적, 논문, 포스터 등에서도 다양하게 소개되고 있다.

원뿔의 절단으로서 타원, 쌍곡선, 포물선에 대한 단델린의 구를 이용한 증명을 이해하려면, 원뿔과 절단평면에 접하는 단델린의 구의 존재성을 알아야 한다. 그러나 대부분의 경우에 단델린의 구의 존재성을 증명하거나 정당화하지 않고 타원, 쌍곡선, 포물선에 대한 증명을 제시하고 있다. 특히, 우리나라의 고등학교 교육과정에서는 원뿔과 내접구, 구와 접평면, 구와 접선 등의 주제를 다루지 않으므로, 교사나 학생들이 정확하게 그러한 증명을 이해하는 데는 한계가 있을 수 있다.

여기서는 문헌 조사를 통해 원뿔에서 단델린의 구의 존재성에 대해 직관적으로 이해할 수 있도록 구성된 증명이 있는지, 단델린의 구를 이용하지 않고 원뿔의 절단으로서 타원, 쌍곡선, 포물선이 얻어진다는 것을 증명하는 방법이 있는지에 대해 확인하였다. 그 결과, 중등학교인 Real Gymnasium의 수학 교과서로 1908년에 출판된 '평면에서 해석기하학의 기초'([1])와 1916년에 출판된 '간략한 평면 해석기하학 강의'([13])에서 흥미로운 접근 방법을 찾았다.

본 연구에서는 국내외 참고문헌과 Real Gymnasium의 수학 교과서들을 분석하여, 원뿔의 절단으로서 타원, 쌍곡선, 포물선을 유도하는 다양한 방법을 소개하고 증명에 필요한 수학적 지식들을 분석하여 체계적으로 제시할 것이며, 증명 방법들의 특징을 비교, 분석할 것이다. 본 연구의 결과는 원뿔과 절단평면의 교선으로서 타원, 쌍곡선, 포물선을 이해하는데 도움을 주고, 교사들에게 타원, 쌍곡선, 포물선을 유도하는 다양한 방법을 소개할 수 있을 것으로 기대된다.

2. 연구의 배경

2.1. 포물선, 타원, 쌍곡선과 원뿔의 절단

포물선, 타원, 쌍곡선은 2015개정 수학과 교육과정과 2022개정 수학과 교육과정에서 진로선택 과목의 하나인 '기하'에서 다룬다. 여기에서는 평면의 점 F와 이 점을 지나지 않는 직선 l에 대해, 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 포물선으로 정의한다. 타원은 평면의 두 점 F, F'에 대해, F, F'으로부터 거리의 합이 일정한 점들의 집합으로 정의하며, 쌍곡선은 점 F, F'으로부터 거리의 차가 일정한 점들의 집합으로 정의한다.

포물선, 타원, 쌍곡선을 이와 같이 정의한 다음, 두 점사이의 거리, 점과 직선사이의 거리를 구하는 방법을 이용하여 포물선의 방정식은 $y^2 = 4px$(이때, 초점은 $F(0, p)$, 준선은 $y = -p$임), 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$(이때, 초점은 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$이고 거리의 합은 $2a$, $a > c > 0$, $b^2 = a^2 - c^2$임), 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$(이때, 초점은 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$이고 거리의 차는 $2a$, $c > a > 0$, $b^2 = c^2 - a^2$임)이라는 것을 유도한다.

한편, 포물선, 타원, 쌍곡선은 원뿔곡선이라고도 불리는데, 이렇게 부르는 것은 이 곡선들의 발생적 측면을 고려한 것이다. 원뿔의 모선과 축이 이루는 각이 φ_1인 원뿔을 평면(절단평면)으로 자른다고 하자. 이때, 절단평면과 원뿔의 축이 이루는 각을 φ_2라 하면, (1) $\varphi_1 = \varphi_2$이면 원뿔과 절단평면의 교선은 포물선이 되며, (2) $0 < \varphi_2 < \varphi_1$이면 원뿔과 절단평면의 교선은 쌍곡선이 되며, (3) $\varphi_1 < \varphi_2 < 90°$이면 원뿔과 절단평면의 교선은 타원이 된다는 것이 알려져 있다([3], [12] 등).

수학사를 보면, 메나에크무스(Menaechmus, 기원전 380−320), 아폴로니우스(Apollonius, 기원전 262−190)는 원뿔을 평면으로 절단하여 절단면(교선)으로 포물선, 타원, 쌍곡선을 얻었다. 메나에크무스는 이를 이용하여 3대작도불능 문제의 하나인 배적문제의 기하학적 해를 제시하였고(비록 이러한 곡선들이 자와 컴퍼스로 작도되지 않아 3대작도불능 문제의 해로 인정되지는 않았지만), 아폴로니우스는 원뿔곡선을 체계적으로 연구하여 8권으로 된 '원뿔곡선'이라는 책을 저술하였다.

우리나라의 수학교과서에서도 포물선, 타원, 쌍곡선이 원뿔을 절단하여 얻어질 수 있다는 것을 소개하고 있다. 그림 1은 고등학교 기하 학교과서에 제시된 원뿔곡선인데, 그림 1에 관련된 내용을 이야기 수학, 생각 열기, 창의·융합 프로젝트 등의 소재로 다루기도 한다. 특히, [9]에서는 창의·융합 프로젝트로 다음과 같은 과제를 제시하고 있다.

> 원뿔을 평면으로 자를 때 생기는 단면의 모양이 포물선, 타원, 쌍곡선임을 증명하는 방법을 조사하여 발표해 보자. ([9], p.54)

그리고 [9]에서는 그림 2를 소개하면서, 단델린이 원뿔과 평면에 접하는 구를 이용하여 원뿔곡선이 포물선, 타원, 쌍곡선의 정의를 만족시킨다는 것을 증명하였다고 소개하고 있다.

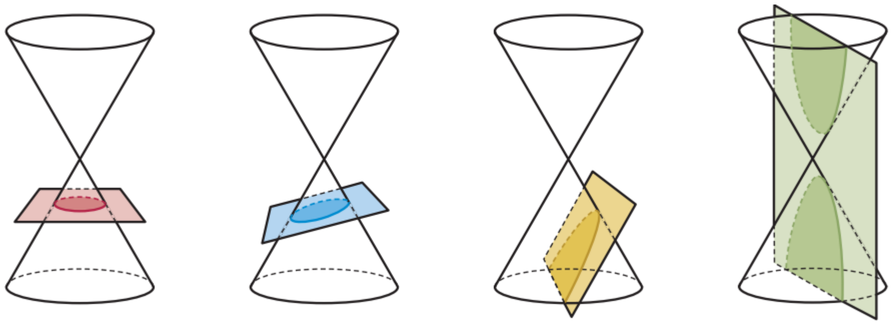

그림 1. 원뿔의 절단([9], p.28)

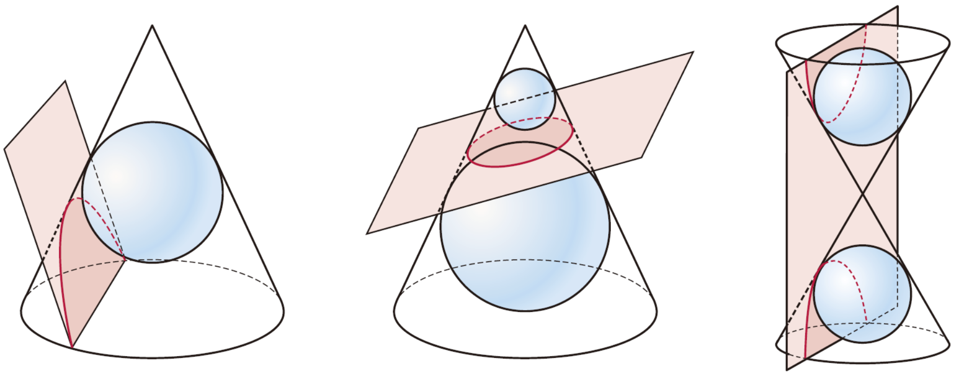

그림 2. 원뿔의 절단과 단델린의 구([9], p.54)

그림 2에서와 같이 원뿔과 절단평면에 접하는 구를 단델린의 구라고 부른다. 단델린의 구를 이용하여 원뿔과 절단평면의 교선이 포물선, 타원, 쌍곡선이 된다는 것의 증명은 [2], [6], [7] 등에 소개되어 있고, 타원이 된다는 것의 증명은 [10], [11], [12] 등에 제시되어 있다. 이 연구들에서는 모두 단델린의 구를 이용한 증명을 제시하였다.

2.2. 단델린의 구를 이용한 원뿔곡선의 증명

단델린의 구를 이용하여 원뿔의 절단으로 타원, 쌍곡선, 포물선을 얻을 수 있다는 것을 증명하자. 여기서는 절단평면과 원뿔의 교선에 대해, 다음의 세 가지를 보일 것이다: (1) 두 점으로부터 교선의 임의의 점까지의 거리의 합이 일정하다는 것(타원이

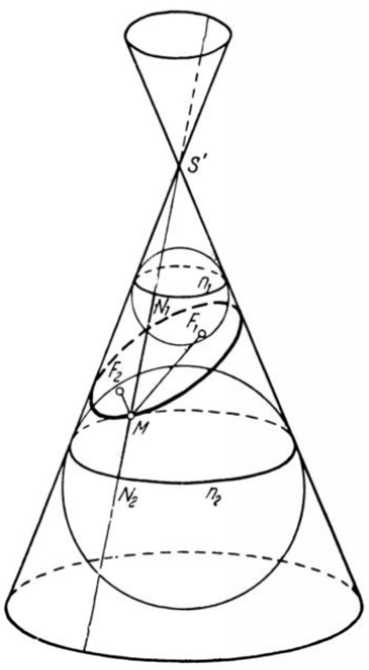

그림 3. 원뿔-타원([2], p.11)

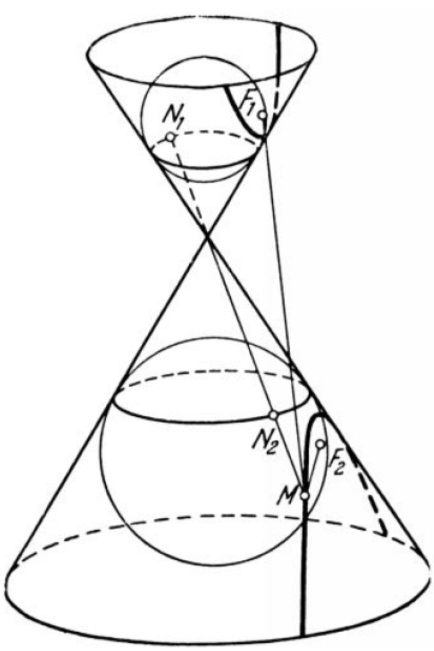

그림 4. 원뿔-쌍곡선([2], p.12)

되는 경우), (2) 두 점으로부터 교선의 임의의 점까지의 거리의 차가 일정하다는 것(쌍곡선이 되는 경우), (3) 한 점과 한 직선으로부터 교선의 임의의 점까지의 거리가 같다는 것(포물선이 되는 경우). 본 연구에서는 원뿔을 절단하여 타원, 쌍곡선을 얻는 경우의 증명을 [2]에 제시된 방법을 중심으로 살펴보자.

원뿔의 절단평면과 점 F_1, F_2에서 접하는 구(단델린의 구)를 작도하자(그림 3). 원뿔과 절단평면의 교선에 속하는 임의의 점 M을 잡자. 그러면, 직선 MF_1은 작은 구에 대한 접선이다. 그리고 모선 MS'은 작은 구와 점 N_1에서 접한다. 그러므로, 구에 대한 접선의 성질에 의해 $\overline{MF_1} = \overline{MN_1}$이 성립한다.

유사한 방법으로, 점 M에서 큰 구에 접선 MF_2를 긋고, 모선 MS'과 큰 구가 점 N_2에서 접한다고 하자. 그러면, 구에 대한 접선의 성질에 의해 $\overline{MF_2} = \overline{MN_2}$가 된다.

얻어진 등식 $\overline{MF_1} = \overline{MN_1}$, $\overline{MF_2} = \overline{MN_2}$를 변끼리 더하면, $\overline{MF_1} + \overline{MF_2} = \overline{MN_1} + \overline{MN_2}$가 된다. 그리고 점 M, N_1, N_2가 한 직선에 속하므로, $\overline{MN_1} + \overline{MN_2} = \overline{N_1N_2}$이다. 이때, $\overline{N_1N_2}$가 주어진 절단에서 일정한 값을 가지므로, 원뿔과 절단평면의 교선의 임의의 점 M로부터 점 F_1, F_2까지의 거리의 합이 일정하다. □

살펴본 원뿔의 절단으로 타원을 얻은 경우의 증명은 단델린의 구를 이용한 전형적인 방법이라고 할 수 있다. [7], [12]의 연구에서도 유사한 증명 방법이 소개되어 있다. 비록

증명 방법이 간단하고 명료하기는 하지만, 그림 3에서와 같이 원뿔과 절단평면에 모두 접하는 구가 존재하는지, 그러한 구를 어떻게 얻는지, 구에 그은 접선의 성질 등에 대한 수학적 지식이 필요하다. 특히, 고등학교 교육과정에서는 원뿔에 접하는 구에 대한 내용은 다루지 않는다.

이제, 원뿔과 절단평면의 교선이 쌍곡선이 되는 경우도 단델린의 구를 이용하여 살펴보자. 그림 4와 같이 원뿔에 내접하는 두 개의 구를 생각하자. 절단평면이 구와 점 F_1, F_2에서 접한다고 하고, 원뿔과 절단평면의 교선에 놓인 임의의 점 M을 생각하자. 그리고 점 M을 지나는 모선이 두 개의 구와 점 N_1, N_2에서 접한다고 하자.

점 N_1, N_2는 점 M을 지나는 모선에 속하므로, $\overline{N_1M} - \overline{N_2M} = \overline{N_1N_2}$가 된다. 한편, 직선 N_1M, F_1M은 구에 대한 접선이므로, $\overline{N_1M} = \overline{F_1M}$이다. 그리고 직선 N_2M, F_2M도 구에 대한 접선이므로, $\overline{N_2M} = \overline{F_2M}$이다. 등식 $\overline{N_1M} = \overline{F_1M}$, $\overline{N_2M} = \overline{F_2M}$을 변끼리 빼면, $\overline{N_1M} - \overline{N_2M} = \overline{F_1M} - \overline{F_2M}$이다.

$\overline{N_1M} - \overline{N_2M} = \overline{N_1N_2}$가 된다는 것을 생각하면, $\overline{N_1M} - \overline{N_2M} = \overline{F_1M} - \overline{F_2M}$을 $\overline{F_1M} - \overline{F_2M} = \overline{N_1N_2}$로 쓸 수 있다. $\overline{N_1N_2}$는 점 M의 위치에 관계없이 일정한 값을 가지므로, 차 $\overline{F_1M} - \overline{F_2M}$은 일정한 값을 가진다. 즉, 원뿔과 절단평면의 교선의 임의의 점 M으로부터 점 F_1, F_2까지의 거리의 차가 일정하다. □

원뿔과 절단평면의 교선이 쌍곡선이 되는 경우의 증명 과정은 타원이 되는 경우와 유사하다. 쌍곡선이 되는 경우(그림 4)에서는 두 개의 단델린의 구를 대칭인 두 원뿔에 절단평면과 접하도록 각각 작도하였고, 타원이 되는 경우(그림 3)에서는 한 원뿔에 두 개의 단델린의 구를 절단평면과 접하도록 작도하였다는 점이 다르다.

이제, 원뿔과 절단평면의 교선이 포물선이 되는 경우를 살펴보자. 이러한 경우의 증명은 타원, 포물선에 비해 복잡한데, 단델린의 구와 삼각형의 닮음을 이용한다. 여기서는 [6]에 제시된 방법을 중심으로 살펴보자.

모선 SC에 평행인 절단평면으로 원뿔을 자른다고 하자. 그러면, 모선 SC와 원뿔의 축을 지나 절단평면과 수직인 평면을 생각할 수 있으며, 이 평면이 원뿔과 모선 SC_1을 따라 만난다고 하자(그림 5에서는 평면 SCC_1이 절단평면과 수직이며 원뿔의 축을 지나는 평면임). 그림 5에서 평면 SCC_1은 절단평면과 직선 AA_1을 따라 만나며, 점 A는 절단평면과 모선 SC_1의 교점이다.

절단평면과 점 F에서 접하며 원뿔과 원 CC_1(지름이 $\overline{CC_1}$인 원)을 따라 접하는 단델린의 구를 생각하자. 그러면, 원 CC_1의 평면은 평면 SCC_1에 수직이 된다. 결국, 절단평면과 원 CC_1의 평면은 평면 SCC_1에 수직이므로, 절단평면과 원 CC_1의 평면이 만나 생기는 교선은 평면 SCC_1에 수직이다(그림 5에서 이 교선은 직선 PN이다). 이때, 점 P는 직선 CC_1과 AA_1의 교점이며, 점 M은 절단평면과 원뿔의 교선의 임의의 점, 점 N은 M에서 절단평면과 원 CC_1의 평면의 교선에 내린 수선의 발이다.

직선 PN이 평면 SCC_1과 수직이므로, 직선 PN은 직선 AA_1과 수직이다. 직선 MN과 PN이 수직이라는 것을 생각하면, 직선 AA_1과 MN은 평행이다. 그리고 직선 AA_1과 직선 SC가 평행이므로, 직선 MN과 SC도 평행이다.

모선 SM을 작도하여, 원 CC_1과의 교점을 K라 하자. 그러면, 직선 MK, MF는 점 M에서 단델린의 구의 그은 접선이 되며, $\overline{MF} = \overline{MK}$가 된다.

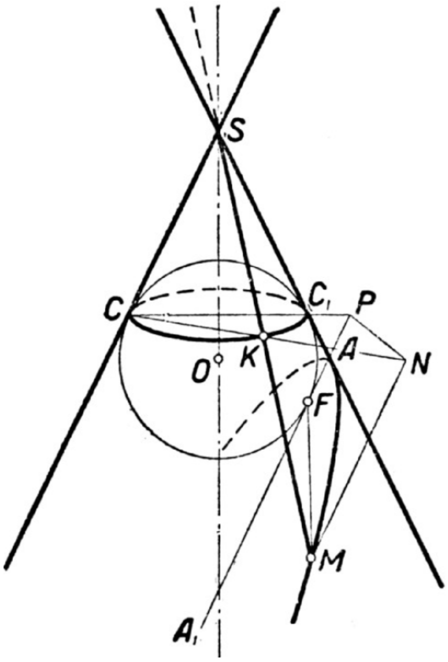

그림 5. 원뿔-포물선([6], p.49)

점 N, K, C가 한 직선에 속한다는 것을 보이자. 이를 위해, 평면 SMN과 평면 SCC_1의 교선에 대해 생각하자. 직선 MN과 AA_1이 평행하므로, 직선 MN은 평면 SCC_1과 평행이다.

그러면, 평면 SMN과 평면 SCC_1의 교선은 직선 MN과 평행하게 된다. 평면 SMN과 평면 SCC_1의 교점이 S이므로, 평면 SMN과 평면 SCC_1의 교선은 점 S를 지나며 직선 MN과 평행인 직선이다. 직선 MN과 SC가 평행이므로, 평면 SMN과 평면 SCC_1의 교선은 직선 SC가 된다. 즉, 점 C는 평면 SMN에 속한다.

그리고 점 N, K가 원 CC_1의 평면에 속한다는 것을 생각하면, 점 N, K는 평면 SMN과 원 CC_1의 평면에 모두 속한다는 것을 알 수 있다. 결국, 직선 NK는 평면 SMN과 원 CC_1의 평면의 교선이다. 점 C는 평면 SMN에도 속하고 원 CC_1에도 속하므로, 점 C는 직선 NK에 속한다는 것을 알 수 있다.

이제, 평면 SMN에 놓인 삼각형 SKC와 MKN의 닮음을 생각하면, $\frac{\overline{SC}}{\overline{SK}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{MK}}$이 된다. 그리고 구에 대한 접선의 성질에 의해 $\overline{SC} = \overline{SK}$이므로, $\overline{MN} = \overline{MK}$가 성립한다. 이때, 단델린의 구에 그은 접선의 성질로부터 $\overline{MF} = \overline{MK}$이며, 결국 $\overline{MN} = \overline{MF}$가 유도된다. □

원뿔과 절단평면의 교선이 포물선이 되는 경우의 증명에서도 단델린의 구를 사용하였지만, 포물선이 되는 경우의 증명은 타원, 쌍곡선의 경우와는 달리 공간기하학의 다양한 지식들이 필요했다. 예를 들어, 그림 5에서 절단평면과 원 CC_1의 평면의 교선이 평면 SCC_1에 수직이 된다는 것, 직선 PN은 직선 AA_1과 수직이 된다는 것, 직선 MN이 평면 SCC_1과 평행이라는 것, 점 N, K, C가 한 직선에 속하는 것 등을 유도하기 위해 공간에서 직선과 평면, 평면과 평면의 평행과 수직에 관련된 수학적 지식이 필요했다.

원뿔과 절단평면의 교선이 타원, 쌍곡선, 포물선이 된다는 것을 단델린의 구를 작도하여 증명하였다. 이때, 단델린의 구의 존재성에 대해 직관적으로 이해할 수 있는 접근 방법은 없는지, 단델린의 구를 이용하지 않고 평면도형과 공간도형의 성질(평면 도형의 닮음, 공간도형의 평행, 수직 등)을 이용하여 원뿔과 절단평면의 교선이 타원, 쌍곡선, 포물선이 된다는 것을 증명할 수는 없는지에 대한 의문을 가질 수 있다.

이러한 의문에 대한 대답을 러시아의 중등교육기관인 Real Gymnasium의 수학 교과서에서 찾을 수 있었다. 여기서는 1908년에 출판된 '평면에서 해석기하학의 기초'([1]), 1916년에 출판된 '간략한 평면 해석기하학 강의'([13])에 제시된 증명 방법을 고찰하고, 이러한 증명에 필요한 수학적 지식들, 증명 과정의 특징을 분석할 것이다.

3. 연구 결과 및 결론

3.1. '평면에서 해석기하학의 기초'([1])에 제시된 방법

[1]은 12개의 장으로 구성되었는데, 원뿔의 절단에 대한 내용은 제 5장에 제시되어 있다. 제 5장에서는 원뿔의 절단으로 얻어지는 원, 타원, 쌍곡선, 포물선, 그리고 이 곡선들의 성질을 다룬다. 여기서는 원뿔의 절단으로 타원, 쌍곡선, 포물선이 얻어지는 경우에 대한 [1]의 증명 방법을 살펴보고, [1]에 제시된 증명의 아이디어, 증명 과정을 기반으로 재구성을 통해 증명 과정을 제시할 것이다.

첫째, 타원이 얻어지는 경우를 살펴보자. 각 ASB가 주어졌고, 각 ASB의 이등분선 SO, 각 ASB의 변들과 만나는 직선 C_1C를 작도하였다. 이때, 직선 C_1C와 각의 이등분선 SO가 이루는 각이 $\angle ASO$보다는 크고 직각보다는 작도록 작도하였다.

삼각형 C_1SC에 내접원 O와 방접원 O_1을 작도하고, 원 O, O_1과 삼각형 C_1SC의 변 C_1C의 접점을 F, F_1이라 하자. 그리고 내접원 O와 삼각형 C_1SC의 변 SC_1, SC의 접점을 E, D로, 방접원 O_1과 변 SC_1, SC의 연장선의 접점을 I, K라 하자(그림 6).

이제, 각의 이등분선 SO를 중심으로 각 ASB를 회전시키면, 원뿔면(또는 원뿔)을 얻을 수 있다. 이러한 회전에서 내접원 O와 방접원 O_1은 구가 되며, 구 O, O_1은 원뿔과 원 ED, 원 IK의 둘레을 따라 접하게 된다.

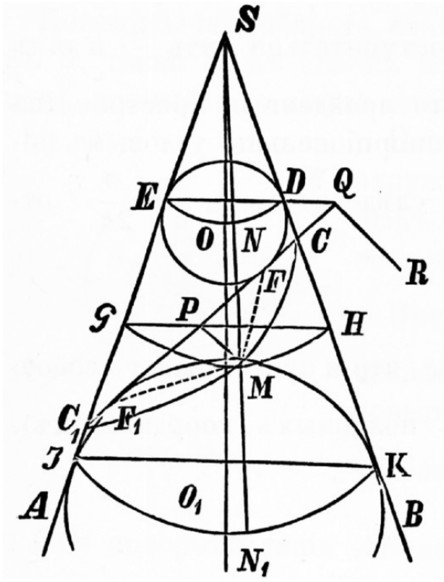

그림 6. 원뿔-타원([1], p.62)

직선 CC_1을 지나며 평면 ASB에 수직이 되도록 원뿔을 자르는 절단평면을 생각하자. 그러면 직선 CC_1은 평면 ASB와 절단평면의 교선이 된다. 그리고 원 O와 절단평면은 선분 CC_1의 점 F에서 접하며, 평면 ASB에 속하는 원(구)의 반지름 OF는 직선 C_1C와 수직을 이룬다. 평면 ASB와 절단평면은 수직이며 평면 ASB에 속하는 직선 OF가 직선 C_1C(평면 ASB와 절단평면의 교선인)에 수직이므로, 직선 OF와 절단평면은 수직을 이룬다. 같은 이유로, 직선 O_1F_1과 절단평면은 수직이다. 그러므로, 절단평면은 점 F, F_1에서 구 O, O_1에 접하는 평면이다.

이제, 절단평면과 원뿔의 교선에 속하는 임의의 점 M을 잡아, 선분 MF와 MF_1의 합이 일정하다는 것을 보이자. 직선 SM은 원뿔의 모선이며, 직선 SM은 원 ED, 원 IK와 점 N, N_1에서 각각 만난다고 하자. 그러면, 그림 6의 원뿔 절단에서 점 M의 위치에 관계없이 선분 NN_1은 일정한 값을 가진다.

직선 MN은 구 O의 접선이다. 그리고 절단평면은 구 O에 점 F에서 접하므로, 절단평면에 속하는 직선 MF는 구 O의 접선이다. 결국, 직선 MN, MF는 점 M에서 구 O에 그은 접선이므로, $\overline{MF} = \overline{MN}$이다. 같은 방법으로 $\overline{MF_1} = \overline{MN_1}$이 된다는 것을 알 수 있다.

등식 $\overline{MF} = \overline{MN}$와 $\overline{MF_1} = \overline{MN_1}$을 변끼리 더하면, $\overline{MF} + \overline{MF_1} = \overline{MN} + \overline{MN_1}$이 된다. 이때 $\overline{MN} + \overline{MN_1} = \overline{NN_1}$이므로, $\overline{MF} + \overline{MF_1} = \overline{NN_1}$이며 일정한 값을 가진다.

한편, 선분 C_1F_1과 C_1F의 합, 선분 CF와 CF_1의 합이 $\overline{NN_1}$과 같다는 것도 보일 수 있다. 직선 C_1F_1과 C_1I는 방접원 O_1에 대한 접선이므로, $\overline{C_1F_1} = \overline{C_1I}$이다. 그리고 직선 C_1F와 C_1E도 내접원 O에 대한 접선이므로, $\overline{C_1F} = \overline{C_1E}$가 된다. 결국, 등식 $\overline{C_1F_1} = \overline{C_1I}$와 $\overline{C_1F} = \overline{C_1E}$로부터 $\overline{C_1F_1} + \overline{C_1F} = \overline{C_1I} + \overline{C_1E} = \overline{IE}$가 유도된다.

그리고 $\overline{SE} = \overline{SD}$인 선분을 각의 이등분선 SO를 중심으로 회전시켜 원 ED를 얻었으므로, $\overline{SE} = \overline{SN}$이다. 유사한 방법으로, $\overline{SI} = \overline{SN_1}$을 얻을 수 있다. 이로부터 $\overline{IE} = \overline{SI} - \overline{SE} = \overline{SN_1} - \overline{SN} = \overline{NN_1}$이다. $\overline{IE} = \overline{NN_1}$이므로, $\overline{C_1F_1} + \overline{C_1F} = \overline{NN_1}$이 된다. 유사한 방법으로, $\overline{CF_1} + \overline{CF} = \overline{NN_1}$이 된다는 것도 유도할 수 있다.

게다가, 등식 $\overline{C_1F_1} + \overline{C_1F} = \overline{NN_1}$과 $\overline{CF_1} + \overline{CF} = \overline{NN_1}$을 변끼리 더하면, $\overline{C_1F_1} + \overline{C_1F} + \overline{CF_1} + \overline{CF} = 2\overline{NN_1}$이 된다. 이때, $\overline{C_1F_1} + \overline{C_1F} + \overline{CF_1} + \overline{CF} = \overline{C_1F_1} + \overline{CF_1} + \overline{C_1F} + \overline{CF} = \overline{C_1C} + \overline{C_1C} = 2\overline{C_1C}$이므로, $2\overline{C_1C} = 2\overline{NN_1}$, $\overline{C_1C} = \overline{NN_1}$이 된다는 것도 알 수 있다. □

살펴본 타원에 대한 [1]의 증명은 두 부분으로 구성된다. 첫째는 점 M이 직선 FF_1에 속하지 않는 경우, 둘째는 점 M이 직선 FF_1에 속하는 경우이다. [2]의 증명에서는 점 M이 직선 F_1F_2에 속하는 경우(그림 3)에 대해서는 특별한 언급이 없었다는 것을 감안하면, [1]의 증명에서는 점 M의 가능한 모든 위치에 대해 다루었다는 점에서 의미가 있다.

점 M이 직선 FF_1에 속하지 않는 경우에 대한 [1]의 증명에서도 [2]에서와 같이 단델린의 구, 즉 원뿔과 절단평면에 접하는 구에서 접선의 성질을 이용했다. 그러나, 단델린의 구에 관련하여 [2]와 [1]의 차이점은 [1]에서는 평면도형인 각, 각의 내부에 만들어진 삼각형의 내접원, 방접원을 회전시켜 원뿔과 절단평면에 내접하는 구로 확장을 시도하였다는 점이다. 즉, 삼각형의 내접원, 방접원의 존재로부터 이들의 회전을 통해 단델린의 구의 존재성에 대한 정당화를 시도하였는데, 이것은 원뿔에 내접하는 구에 대한 직관적 이해의 측면에서 의미있게 볼 수 있을 것이다.

[1]의 증명에 필요한 수학적 지식을 평면도형과 공간도형으로 나누어 살펴보자. 평면도형에 대한 지식으로 삼각형의 내접원과 방접원의 존재성, 원의 접선의 성질을 들 수 있으며, 공간도형에 대한 지식으로 수직인 평면들의 교선에 관련된 성질, 평면이 구에 접할 필요충분조건, 구의 접선의 성질 등이 있다. 이를 다음과 같이 정리할 수 있다.

정리 1. 평면 α, β가 수직이며, 직선 l은 평면 α에 속한다. 직선 l이 평면 α, β의 교선과 수직이면, 직선 l은 평면 β에 수직이다([5]의 정리 4.12(1)).

정리 2 (평면이 구에 접할 필요충분조건)**.** 평면 α가 구(구면)에 접할 필요충분조건은 평면 α와 구의 접점에 그은 구의 반지름이 평면 α와 수직이다([8]의 정리 10.1).

정리 3. 점 A에서 구에 그은 접선들에 대해, 점 A에서 접점들까지의 거리는 서로 같다 ([8]의 정리 10.18).

위의 증명 과정에서 정리 1은 직선 OF가 절단평면에 수직이라는 것을 보이는 과정에서 필요했다. 즉, 평면 ASB가 정리 1의 평면 α에 해당하며, 절단평면은 β, 직선 OF가 l, 직선 C_1C가 평면 α, β의 교선에 해당한다. 직선 OF와 C_1C가 수직이므로, 정리 1에 의해 직선 OF는 절단평면에 수직이라는 것이 유도된다.

정리 2는 구와 절단평면이 접한다는 것을 유도하기 위해 사용되었다. 즉, 정리 1에 의해 직선 OF가 절단평면에 수직이라는 것을 알았고, 선분 OF는 구 O의 반지름이므로 정리 2에 의해 구 O와 절단평면이 접한다는 것을 알 수 있다. 그리고 구 O_1과 절단평면이 접한다는 것도 증명된다. 한편, 점 M에서 구 O에 그은 접선이 MN, MF이므로, 정리 3에 의해 $\overline{MF} = \overline{MN}$이 유도된다. 그리고 $\overline{MF_1} = \overline{MN_1}$도 성립한다는 것을 알 수 있다.

둘째, 쌍곡선이 되는 경우를 살펴보자. 직선 CC_1이 각 ASB, 각 ASB의 맞꼭지각 A_1SB_1과 만나며(점 C, C_1은 직선과 각들의 변의 교점), 직선 CC_1이 각 ASB, A_1SB_1의 이등분선 O_1SO와 이루는 각의 크기가 각 ASO보다 작다고 하자.

각 ASB와 A_1SB_1의 내접원 O, O_1을 작도하여, 이 원들이 직선 CC_1과 점 F, F_1에서 접하고, ASB, A_1SB_1의 변들과 점 E, D, I, K에서 접하도록 하자(그림 7). 그러면, 삼각형 SIK, SED가 이등변삼각형이므로, 선분 ED, IK는 각의 이등분선 SO, SO_1과 수직을 이룬다. 이제, 각 ASB와 A_1SB_1을 직선 SO를 중심으로 회전시키면, 두 개의 원뿔을 얻을 수 있다. 이 회전에서 원 O, O_1은 구가 되며, 이 구들은 원뿔에 원 ED, 원 IK를 따라 각각 접한다.

직선 CC_1을 지나며 평면 ASB, A_1SB_1에 수직인 절단평면으로 원뿔을 자르면, 원뿔에 교선으로 곡선이 생긴다. 이제, 구 O가 절단평면과 점 F에서 접한다는 것을 보이자. 평면 ASB와 절단평면은 수직을 이루며, 구 O의 반지름인 OF는 평면 ASB에 속한다. 그리고 OF는 평면 ASB와 절단평면의 교선인 CC_1과 수직을 이루므로, 정리 1에 의해 OF는 절단평면과 수직이다. 그러므로 정리 2에 의해 구 O는 절단평면에 점 F에서 접한다. 같은 방법으로, 구 O_1이 절단평면에 점 F_1에서 접한다는 것을 알 수 있다.

이제, 절단평면과 원뿔의 교선에서 임의의 점 M을 잡아(그림 7에서는 구 O와 절단평면의 교선에 있는 점 M을 잡았지만, 구 O_1과 절단평면의 교선에서 잡을 수도 있음), 점 M을 원뿔의 꼭짓점 S, 점 F, F_1과 연결하자. 그러면, 직선 SM은 원뿔 O, O_1의 모선이 된다.

직선 SM이 원 ED, 원 IK와 점 N, N_1에서 만난다고 하자. 원 ED, 원 IK의 점들이 원뿔의 꼭짓점 S에서 같은 거리만큼 떨어져 있으므로, $\overline{NN_1} = \overline{SN} + \overline{SN_1}$은 점

M의 위치에 관계없이 일정하다. 그리고 직선 MF와 MN은 점 M에서 구 O에 그은 접선이므로, 정리 3에 의해 $\overline{MF} = \overline{MN}$이다. 같은 이유로, $\overline{MF_1} = \overline{MN_1}$이다.

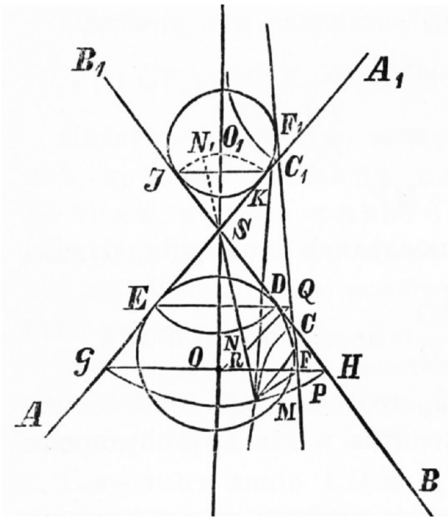

그림 7. 원뿔-쌍곡선([1], p.66)

등식 $\overline{MF_1} = \overline{MN_1}$, $\overline{MF} = \overline{MN}$을 변끼리 빼면, $\overline{MF_1} - \overline{MF} = \overline{MN_1} - \overline{MN}$이 된다. 이때 $\overline{MF_1} - \overline{MF} = \overline{MN_1} - \overline{MN} = \overline{NN_1}$이므로, 차 $\overline{MF_1} - \overline{MF}$는 M의 위치에 관계없이 일정하다는 것을 알 수 있다.

특히, 차 $\overline{MF_1} - \overline{MF}$가 $\overline{CC_1}$과 같다는 것도 보일 수 있다. 이를 위해, $\overline{CC_1} = \overline{NN_1}$이라는 것을 보이면 된다. 평면 ASB, A_1SB_1에서 직선 CC_1이 원 O, O_1의 접선이므로, $\overline{CF_1} = \overline{CI}, \overline{CF} = \overline{CD}$가 성립한다. 이 등식들을 변끼리 빼면, $\overline{CF_1} - \overline{CF} = \overline{CI} - \overline{CD} = \overline{ID} = \overline{NN_1}$이 된다. 같은 방법으로 $\overline{C_1F} - \overline{C_1F_1} = \overline{C_1E} - \overline{C_1K} = \overline{EK} = \overline{NN_1}$을 보일 수 있다. 이제, 등식 $\overline{CF_1} - \overline{CF} = \overline{NN_1}$, $\overline{C_1F} - \overline{C_1F_1} = \overline{NN_1}$을 변끼리 더하자. 그러면, 좌변은 $\overline{CF_1} - \overline{CF} + \overline{C_1F} - \overline{C_1F_1} = \overline{CF_1} - \overline{C_1F_1} + \overline{C_1F} - \overline{CF} = 2\overline{CC_1}$이며, 우변은 $2\overline{NN_1}$이다. 이로부터 $\overline{CC_1} = \overline{NN_1}$이 증명된다. □

원뿔과 절단평면의 교선이 쌍곡선이 되는 경우에 대한 [1]의 증명에서는 타원의 경우에서와 마찬가지로, 정리 1, 정리 2, 정리 3이 사용되었다. 살펴본 [1]의 증명을 [2]의 증명과 비교하면, (1) 두 증명 모두에서 원뿔과 절단평면에 접하는 단델린의 구, 단델린의 구에 대한 접선의 성질을 사용하였고, (2) [1]의 증명에서는 단델린의 구를 각에 접하는 내접원의 회전을 통해 도입하였고, 단델린의 구 O, O_1이 절단평면과 점 F, F_1에서 각각 접한다는 것을 보였다([2]의 증명에서는 구가 절단평면과 접한다는 것을 가정하였음). (3) [1]의 증명에서는 차 $\overline{MF_1} - \overline{MF}$가 $\overline{CC_1}$과 같다는 것도 증명하였다.

결국, [1]의 증명이 [2]의 증명보다는 원뿔에 내접하는 구의 존재성에 대한 직관적 이해를 위해 배려하였고(각에 내접하는 원의 회전을 통해 원뿔에 내접하는 구를 도입함), 공간에서 구와 평면의 위치 관계, 평면들의 위치 관계에 대한 다양한 논증을 포함하고 있다([1]의 증명에서는 정리 1, 정리 2, 정리 3이 직접적으로 인용되지는 않았고, 본 연구에서 논증의 이해를 위해 정리 1, 정리 2, 정리 3을 증명 과정에 포함시켜 기술하였다). 그리고, [1]의 증명에는 원뿔과 절단평면의 교선인 쌍곡선의 한 점 M으로부터 F, F_1(쌍곡선의 초점인)까지의 거리의 차가 $\overline{CC_1}$과 같다는 것도 포함되어 있다.

셋째, 포물선이 되는 경우를 살펴보자. 각 ASB, 각 ASB의 이등분선 SO를 생각하자. 그리고 각 ASB의 내접원 O를 작도하여, 각 ASB의 변들과의 접점을 E, D라 하자. 평면 ASB에 속하는 직선 CC_1이 각 ASB의 변 AS와 평행이며, 변 SB와는 점 C에서 만나며 내접원 O와는 점 F에서 접한다고 하자(그림 8).

각의 이등분선 SO를 중심으로 각 ASB를 회전시켜 원뿔을 만들면, 원뿔은 구 O와 원 ED를 따라 접한다. 그리고 직선 CC_1을 지나며 평면 ASB와 수직인 절단평면으로 원뿔을 잘라 생기는 교선을 생각하자.

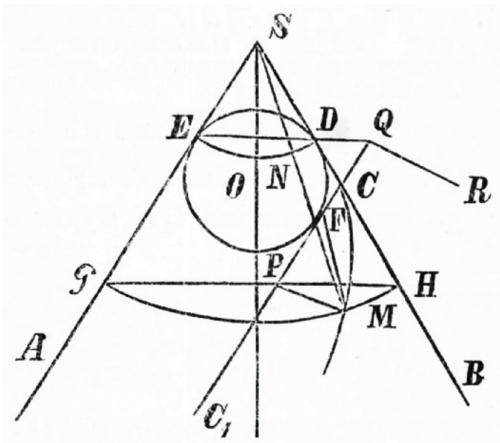

그림 8. 원뿔-포물선([1], p.70)

정리 1에 의해, 직선 CC_1을 지나며 평면 ASB와 수직인 절단평면은 직선 OF와 수직이다. 왜냐 하면, 직선 CC_1과 OF가 수직이며(직선 CC_1이 내접원 O의 접선이므로) 직선 CC_1은 평면 ASB와 절단평면의 교선이기 때문이다. 그러므로, 정리 2에 의해 구 O는 절단평면과 점 F에서 접한다.

절단평면과 원뿔의 교선에 속하는 임의의 점 M에 대해, 직선 MF는 구 O에 대한 접선이다. 그리고 직선 SM은 원뿔의 모선이며 구 O의 접선이기도 하다. 이제, 모선 SM

과 원 ED의 교점을 N이라 하자. 그러면, 직선 MF, MN이 구 O에 대한 접선이므로, 정리 3에 의해 $\overline{MF} = \overline{MN}$이다.

평면 ASB에서 직선 ED와 CC_1의 교점을 Q라 하고, 원 ED의 평면과 절단평면의 교선을 QR이라 하자. 그러면, 원 ED의 평면과 절단평면이 평면 ASB와 수직이고 원 ED의 평면과 절단평면의 교선이 QR이므로, 직선 QR은 평면 ASB에 수직을 이룬다.

이제, 점 M을 지나며 평면 ASB와 직선 GH를 따라 만나며, 각의 이등분선 SO와 수직을 이루는 평면 GMH를 생각하자. 그러면, 평면 GMH는 평면 ASB와 수직이 되며, 직선 GH와 CC_1의 교점을 P라 하자. 그러면, 직선 MP는 평면 GMH와 절단평면의 교선이 된다. 평면 GMH와 절단평면이 평면 ASB와 수직이라는 것을 생각하면, 평면 GMH와 절단평면의 교선 MP가 평면 ASB에 수직이 된다. 결국, 직선 QR과 MP가 평면 ASB에 수직이므로, 직선 QR과 MP는 평행이다. 그러므로 점 M에서 직선 QR까지의 거리는 $\overline{PQ}$와 같게 된다.

평면 ASB에서 직선 ED와 GH가 평행이므로, 삼각형 CHP와 CDQ는 닮음이며, $\frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{CD}}$가 된다. 이 등식의 양변에 1을 더하면, $\frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}}+1 = \frac{\overline{CH}}{\overline{CD}}+1$, $\frac{\overline{CP}+\overline{CQ}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{CH}+\overline{CD}}{\overline{CD}}$, $\frac{\overline{PQ}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{DH}}{\overline{CD}}$가 된다. 그런데, $\overline{DH} = \overline{MN} = \overline{MF}$가 성립하므로, $\frac{\overline{PQ}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{DH}}{\overline{CD}}$에서 $\frac{\overline{PQ}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{MF}}{\overline{CD}}$가 얻어진다.

삼각형 CDQ에서 $\angle CDQ = \angle SDE$(맞꼭지각), $\angle SDE = \angle SED$(삼각형 SED가 이등변삼각형), $\angle SED = \angle CQD$(평행한 직선 SE와 CC_1에서 엇각)이므로, $\angle CDQ = \angle CQD$이고 삼각형 CDQ는 이등변삼각형이다. 즉, $\overline{CD} = \overline{CQ}$이며, $\frac{\overline{PQ}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{MF}}{\overline{CD}}$로부터 $\overline{PQ} = \overline{MF}$가 유도된다. 이것은 절단평면과 원뿔의 교선의 점 M으로부터 직선 QR까지의 거리($\overline{PQ}$)와 점 M에서 F까지의 거리($\overline{MF}$)가 같다는 것을 의미한다. □

살펴본 증명 과정에서는 교선이 타원, 쌍곡선인 경우의 증명에서 사용했던 공간기하학의 정리들 이외에 다음과 같은 정리들이 추가로 필요하다.

정리 4. 평면 α, β가 평면 γ에 수직이다. 직선 l이 평면 α, β의 교선이면, 직선 l은 평면 γ에 수직이다([5]의 정리 4.13(1)).

정리 5. 평면 α와 직선 l이 수직이고, 직선 l은 평면 β에 속한다. 그러면, 평면 α와 β가 수직이다([5]의 정리 4.11).

정리 6. 직선 l, m이 평면 α에 수직이면, 직선 l, m은 평행이다([5]의 정리 4.5).

정리 4는 직선 QR과 평면 ASB가 수직이라는 것을 유도하기 위해 필요하다. 원 ED의 평면과 절단평면이 평면 ASB에 수직이고, 직선 QR이 원 ED의 평면과 절단평면의 교선이므로, 정리 4에 의해 직선 QR이 평면 ASB에 수직이라는 것이 유도된다. 그리고 직선 MP가 평면 ASB에 수직이라는 것도 정리 4에 의해 유도된다.

정리 5는 평면 GMH와 평면 ASB가 수직이 된다는 것을 유도하기 위해 필요하다. 평면 GMH가 각의 이등분선 SO에 수직이며 SO는 평면 ASB에 속하므로, 정리 5에 의해 평면 GMH와 평면 ASB는 수직이다.

정리 6은 직선 QR과 MP가 평행이라는 것을 유도하기 위해 필요하다. 직선 QR과 MP가 평면 ASB에 수직이므로, 정리 6에 의해 직선 QR과 MP가 평행이다.

살펴본 것과 같이, 교선이 포물선이 되는 경우에 대한 증명에서는 정리 1, 정리 2, 정리 3, 정리 4, 정리 5, 정리 6과 같이 다양한 수학적 지식이 필요했으며, 교선이 타원, 쌍곡선인 경우의 증명에 비해 복잡한 과정을 통해 결론에 도달할 수 있었다.

교선이 포물선이 되는 경우의 증명을 단계별로 정리하면, (1) 각의 이등분선 SO를 중심으로 각 ASB과 내접원을 회전시켜 원뿔과 구(단델린의 구)를 만들고, 절단평면으로 원뿔을 자르기, (2) 구와 절단평면이 점 F에 접하는 것을 보이고 $\overline{MF} = \overline{MN}$을 유도하기, (3) 직선 QR과 평면 ASB가 수직임을 보이기, (4) 평면 GMH를 작도하고 평면 GMH와 평면 ASB가 수직임을 보여, 직선 QR과 MP가 평행이며 점 M에서 QR까지의 거리가 $\overline{PQ}$임을 유도하기, (5) 삼각형 CDQ와 CHP의 닮음을 생각하여 $\frac{\overline{PQ}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{MF}}{\overline{CD}}$를 유도하기, (6) 삼각형 CDQ가 이등변삼각형임을 보여 $\overline{CD} = \overline{CQ}$를 유도하고 $\overline{PQ} = \overline{MF}$를 보였다. 이를 통해, 점 M으로부터 직선 QR까지의 거리와 점 M에서 F까지의 거리가 같다는 것을 증명할 수 있었다.

한편, [1]의 증명 방법과 [6]의 방법에 사용된 평면을 비교하면, [6]의 증명에서는 원뿔의 축을 지나며 모선 SC, SC_1을 포함하는 평면, 절단평면 이외에 단델린의 구와 원뿔의 교선인 원 CC_1의 평면, 평면 SMN을 이용하였다. [1]의 증명에서는 원뿔의 축을 지나며 모선 SA, SB를 포함하는 평면, 절단평면 이외에 단델린의 구와 원뿔의 교선인 원 ED의 평면, 평면 GMH를 이용하였다. 결국, 그림 5에서와 같이 평면 SMN를 생각하느냐, 그림 8에서 평면 GMH를 생각하느냐에 따라 다른 증명이 얻어졌다.

3.2. '간략한 평면 해석기하학 강의'([13])에 제시된 방법

[1]에서는 평면도형인 원을 작도한 다음, 회전을 통해 공간으로 확장하여 단델린의 구를 만들어 원뿔과 절단평면의 교선이 타원, 쌍곡선, 포물선이 된다는 것을 증명했다면, [13]에서는 단델린의 구를 이용하지 않는 증명을 제시하였다. [13]에 제시된 증명의 방법을 중심으로, 원뿔과 절단평면의 교선으로 타원이 얻어지는 경우를 살펴보자.

원뿔의 축을 포함하며 원뿔과 모선 $AB'C$, $A'BC$를 따라 만나는 평면 ABC를 생각하자. 평면 ABC는 원뿔을 이등분하는데, 그림 9는 이등분된 원뿔의 한 부분이다. 이제, 평면 ABC에 수직이며 원뿔을 절단하는 평면들을 생각하자. 평면 α는 평면 ABC와 직선 AB를 따라 만나며 평면 ABC에 수직인 절단평면이고, 곡선 AMB는 평면 α와 원뿔의 교선이라 하자.

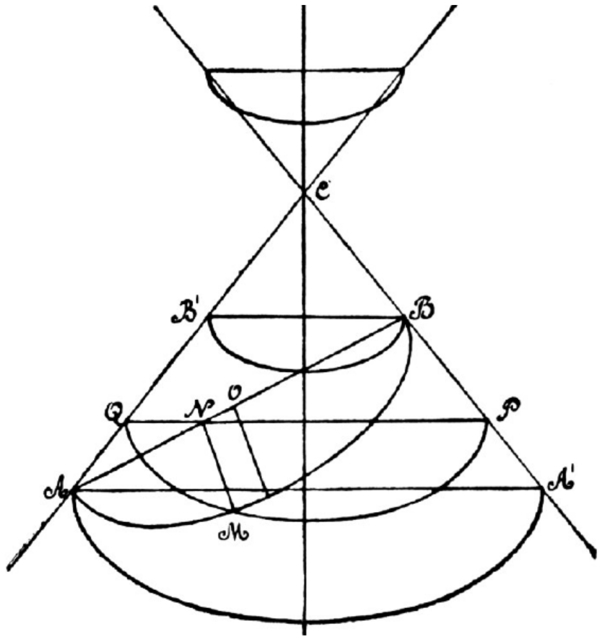

그림 9. 원뿔-타원([13], p.82)

평면 α_1, α_2, α_3은 원뿔의 축에 수직이며, 점 B, M, A를 지나는 평면이라 하자. 원뿔의 축이 평면 α_1, α_2, α_3과 수직을 이루므로, 평면 α_1, α_2, α_3는 서로 평행하다. 그리고 원뿔의 축은 평면 ABC에 속하며 평면 α_1, α_2, α_3과 수직을 이루므로, 정리 5에 의해 평면 α_1, α_2, α_3은 평면 ABC와 수직이다.

평면 α_1, α_2, α_3과 평면 ABC의 교선을 직선 $B'B$, QP, AA'이라 하자. 평면 α_1, α_2, α_3이 서로 평행하므로, 교선 $B'B$, QP, AA'은 서로 평행하다. 이제, 평면 α와 α_2의 교선을 MN이라 하자. 그러면, 평면 α와 ABC, 평면 α_2와 ABC가 각각 수직이므로, 정리 4에 의해 직선 MN은 평면 ABC와 수직이다. 결국, 직선 MN은 평면 ABC에 속하는 직선 AB, QP와 수직이다.

한편, $\overline{QN} \parallel \overline{B'B}$이므로 삼각형 AQN과 $AB'B$는 닮음이며, $\frac{\overline{AN}}{\overline{QN}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BB'}}$가 성립한다. 그리고 삼각형 NBP와 ABA'도 닮음이므로, $\frac{\overline{NB}}{\overline{NP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AA'}}$가 된다. 얻어진 두 등식을 변끼리 서로 곱하면, $\frac{\overline{AN}\cdot\overline{NB}}{\overline{QN}\cdot\overline{NP}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BB'}\cdot\overline{AA'}}$이 된다.

평면 α_2와 원뿔의 교선인 원 QMP에서 할선의 성질에 의해 $\overline{QN} \cdot \overline{NP} = \overline{NM}^2$이 얻어진다. 이 등식을 $\frac{\overline{AN}\cdot\overline{NB}}{\overline{QN}\cdot\overline{NP}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BB'}\cdot\overline{AA'}}$에 대입하면, $\frac{\overline{AN}\cdot\overline{NB}}{\overline{NM}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BB'}\cdot\overline{AA'}}$을 얻을 수 있다.

이제, 그림 9에서 평면 α에 직교좌표계를 생각하자. x축으로 $\overline{AB}$를 지나는 직선을 잡고, 점 A의 방향을 x축의 양의 방향으로 하자. 그리고 y축을 $\overline{AB}$의 중점 O를 지나 직선 MN에 평행인 직선으로 잡고, 점 O를 원점으로 하자. 그러면, 그림 10을 얻을 수 있다.

이 직교좌표계에서 평면 α와 원뿔의 교선이 타원이라는 것, 즉 등식 $\frac{\overline{AN}\cdot\overline{NB}}{\overline{NM}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BB'}\cdot\overline{AA'}}$ 이 타원의 방정식이라는 것을 보일 수 있다.

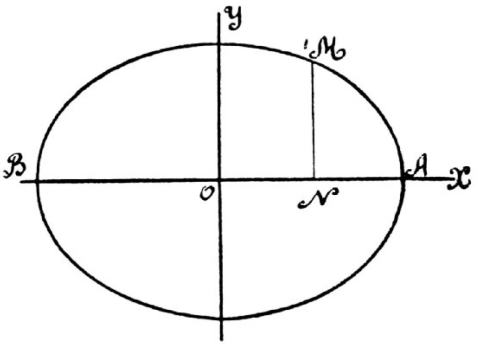

그림 10. 타원([13], p.83)

점 M의 좌표를 (x, y)로 놓으면, 직선 MN과 AB가 수직이므로 점 N의 좌표는 $(x, 0)$이고 $\overline{ON} = x$, $\overline{NM} = y$이다. 평면 α에 의한 원뿔의 절단에서 평면 α와 평면 ABC의 교선인 선분 AB의 길이는 일정한 값을 가진다. 가령, $\overline{AB} = 2a$라 놓으면, $\overline{OA} = \overline{OB} = a$이다. 이로부터 $\overline{NA} = \overline{OA} - \overline{ON} = a - x$, $\overline{BN} = \overline{BO} + \overline{ON} = a + x$가 된다. 그리고 평면 α에 의한 원뿔의 절단에서 점 A', B'은 평면 α_3과 평면 ABC, α_1과 평면 ABC의 교점이므로, $\overline{BB'}$과 $\overline{AA'}$도 일정한 값을 가진다. 이때, 곱 $\overline{BB'} \cdot \overline{AA'}$은 일정한 값을 가지며, $\overline{BB'} \cdot \overline{AA'} = 4b^2$이라 놓을 수 있다.

결국, 등식 $\frac{\overline{AN}\cdot\overline{NB}}{\overline{NM}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BB'}\cdot\overline{AA'}}$에 $\overline{AN} = a - x$, $\overline{NB} = a + x$, $\overline{NM} = y$, $\overline{AB} = 2a$, $\overline{BB'} \cdot \overline{AA'} = 4b^2$을 대입하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{(a-x)(a+x)}{y^2} = \frac{4a^2}{4b^2}, \quad \frac{a^2 - x^2}{y^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

$\frac{a^2-x^2}{y^2} = \frac{a^2}{b^2}$에서 a^2을 좌변으로 이항하고, y^2을 우변으로 이항하여 정리하자. 그러면, $\frac{a^2-x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$, $1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$을 얻을 수 있다. □

평면 α와 원뿔의 교선이 타원이라는 것을 증명하는 과정은 평면 α와 원뿔의 교선에 속하는 임의의 점 M에 대한 등식을 유도하는 단계, 직교좌표계를 생각하여 얻어진 등식이 타원이라는 것을 보이는 단계로 나눌 수 있다.

첫째, 평면 α와 원뿔의 교선에 속하는 점 M에 대한 등식을 유도하는 단계는 다음과 같이 구성된다. (1) 원뿔의 축을 지나며 원뿔과 모선 $AB'C$, $A'BC$를 따라 만나는 평면 ABC, 평면 ABC와 수직을 이루는 절단평면 α를 생각한다. (2) 평면 α와 원뿔의 교선에 임의의 점 M을 잡아, 점 B, M, A를 지나며 원뿔의 축에 수직인 평면 α_1, α_2, α_3을

작도한다. (3) 평면 α와 α_2의 교선 MN이 평면 ABC와 수직을 이루며, 직선 MN과 AB가 수직이라는 것을 유도하고, (4) 삼각형의 닮음과 원의 할선의 성질을 이용하여, 등식 $\frac{\overline{AN}\cdot\overline{NB}}{\overline{NM}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BB'}\cdot\overline{AA'}}$을 유도한다.

둘째, 얻어진 등식이 타원의 방정식이라는 것을 보이는 단계는 (1) 평면 α에서 직선 AB를 x축, 직선 MN과 평행한 직선을 y축으로 하는 직교좌표계를 생각하고, (2) 직교좌표계에서 $\overline{AN}$, $\overline{NB}$, $\overline{NM}$을 구하고, $\overline{AB} = 2a$, $\overline{BB'} \cdot \overline{AA'} = 4b^2$이라 놓고, (3) $\frac{\overline{AN}\cdot\overline{NB}}{\overline{NM}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BB'}\cdot\overline{AA'}}$으로부터 타원의 방정식 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$을 유도한다.

살펴본 증명에 필요한 수학적 지식을 공간도형과 평면도형으로 나누어 살펴보자. 공간도형에 관련된 수학적 지식으로는 정리 4, 정리 5 외에 다음의 정리가 필요하다.

정리 7. 두 평면 α, β가 직선 l과 수직이면, 평면 α, β는 평행하다([5]의 정리 4.7).

정리 8. 평행한 평면 α, β가 평면 γ와 만나면, 평면 α와 γ의 교선은 평면 β와 γ의 교선과 평행하다([5]의 정리 1.15).

이때, 정리 7은 원뿔의 축에 수직인 평면 α_1, α_2, α_3이 서로 평행하다는 것을 유도하는 과정에서 이용했고, 정리 8은 평행한 평면 α_1, α_2, α_3와 평면 ABC가 만나 생기는 교선들이 서로 평행하다는 것을 보이는데 필요했다.

한편, 평면도형에 관련된 수학적 지식인 (1) 삼각형의 닮음 조건과 닮음의 성질, (2) 원에서 교차하는 할선의 성질이 증명 과정에서 중요한 역할을 하였다.

살펴본 [13]의 증명은 앞에서 고찰한 [1], [2]의 증명과 비교하면, 그 접근 방법에서 차이가 있다. [1], [2]의 증명에서는 단델린의 구를 이용하여 원뿔과 절단평면의 교선에 속한 점 M으로부터 두 점(타원의 초점에 해당하는)까지의 거리의 합이 일정하다는 것을 보였다. 그러나 [13]의 증명에서는 단델린의 구를 이용하지 않고, 평면들의 수직 또는 평행에 관련된 성질을 바탕으로 절단평면에 직교좌표계를 만들어 직접 타원의 방정식 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$을 유도하였다.

원뿔과 절단평면의 교선으로 쌍곡선이 얻어지는 경우에 대해 살펴보자. 타원의 경우와 마찬가지로, 원뿔과 절단평면의 교선에 대해 쌍곡선의 방정식을 유도할 수 있다. 원뿔의 축을 지나며 원뿔과 모선 ACB', $A'CB$를 따라 만나는 평면 ABC를 생각하자. 평면 β는 평면 ABC와 수직을 이루면서 원뿔을 자르는 절단평면이며, 평면 β와 원뿔의 교선이 평면 ABC와 점 A, B에서 만난다고 하자(그림 11).

평면 β와 원뿔의 교선에 속하는 임의의 점 M을 잡아, 점 B, A, M을 지나며 원뿔의 축에 수직인 평면 β_1, β_2, β_3을 작도하자. 평면 β_1, β_2, β_3와 평면 ABC의 교선을 BB', AA', PQ라 하자. 그러면, 정리 7에 의해 평면 β_1, β_2, β_3는 평행이며, 정리 8에 의해 β_1, β_2, β_3와 평면 ABC의 교선 BB', AA', PQ는 서로 평행이다. 그리고 평면 β, 평면 β_3가 평면 ABC에 수직이므로, 정리 4에 의해 평면 β와 평면 β_3의 교선 MN은 평면 ABC에 수직이다. 그리고 직선 MN은 직선 NB, PQ와 수직이 된다.

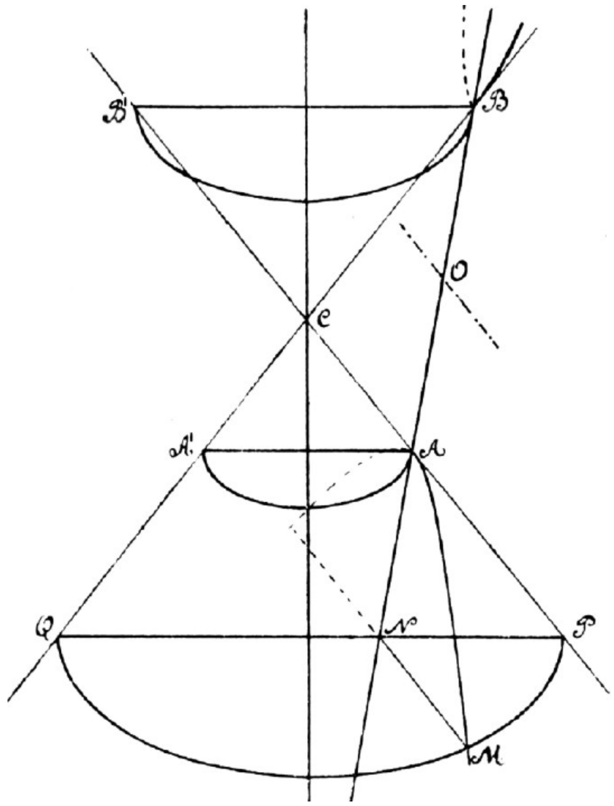

그림 11. 원뿔-쌍곡선([13], p.84)

직선 PQ, AA'이 평행이므로, 삼각형 QNB와 $A'AB$는 닮음이며, $\frac{\overline{QN}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{A'A}}{\overline{AB}}$이다. 그리고 직선 PQ, BB'의 평행으로부터 삼각형 NAP와 BAB'이 닮음이며, $\frac{\overline{NP}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{B'B}}{\overline{AB}}$가 된다. 얻어진 두 등식을 변끼리 서로 곱하면, $\frac{\overline{QN}\cdot\overline{NP}}{\overline{NB}\cdot\overline{NA}} = \frac{\overline{A'A}\cdot\overline{B'B}}{\overline{AB}^2}$이 얻어진다.

평면 β_3와 원뿔의 교선인 원 PMQ에서 할선의 성질에 의해, $\overline{QN}\cdot\overline{NP} = \overline{NM}^2$이 성립한다. 이것을 $\frac{\overline{QN}\cdot\overline{NP}}{\overline{NB}\cdot\overline{NA}} = \frac{\overline{A'A}\cdot\overline{B'B}}{\overline{AB}^2}$에 대입하면, 등식 $\frac{\overline{NM}^2}{\overline{NB}\cdot\overline{NA}} = \frac{\overline{A'A}\cdot\overline{B'B}}{\overline{AB}^2}$이 얻어진다. 이 등식이 쌍곡선의 방정식이라는 것을 보이기 위해, 평면 β에 직교좌표계를 도입하자.

직선 AB를 x축으로 잡고, 선분 AB의 중점 O를 지나 직선 MN과 평행한 직선을 y축으로 하는 직교좌표계를 생각하자(그림 12). 평면 β에 의한 원뿔의 절단에서 선분 AB의 길이는 일정하므로 $\overline{AB} = 2a$라 놓자. 그리고 선분 AA', BB'도 일정하므로, $\overline{A'A}\cdot\overline{B'B} = 4b^2$으로 놓을 수 있다.

점 M의 좌표를 (x, y)라 하면, $\overline{MN} = y$, $\overline{ON} = x$, $\overline{NB} = a + x$, $\overline{NA} = x - a$가 된다. 이것을 등식 $\frac{\overline{NM}^2}{\overline{NB}\cdot\overline{NA}} = \frac{\overline{A'A}\cdot\overline{B'B}}{\overline{AB}^2}$에 대입하자. 그러면, $\frac{y^2}{x^2-a^2} = \frac{4b^2}{4a^2}$이 되며, 이

등식을 정리하면 $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2-a^2}{a^2}$, $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$이 된다. 이 등식은 쌍곡선의 방정식이므로, 평면 β에 의한 원뿔의 절단면은 쌍곡선이다. □

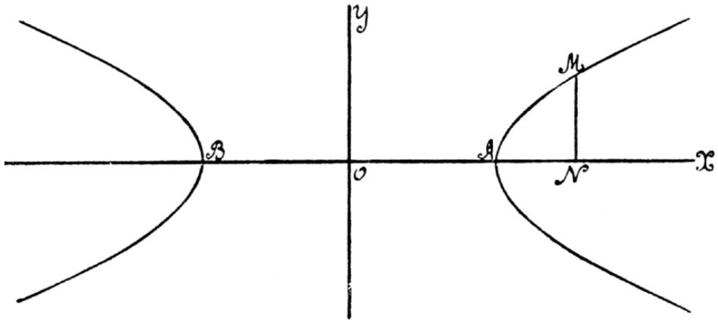

그림 12. 쌍곡선([13], p.85)

살펴본 것과 같이, 원뿔과 절단평면의 교선이 쌍곡선인 경우의 증명은 타원인 경우에 사용된 수학적 지식들, 증명의 과정이 유사하다. 타원인 경우와 쌍곡선인 경우의 증명 과정을 정리하면, (1) 평면 ABC에 수직이고 원뿔의 모선과 A, B에서 만나는 절단평면 α(쌍곡선은 β)를 작도하고, (2) 평면 α(쌍곡선은 β)의 점 M과 A, B를 지나며 원뿔의 축에 수직인 평면 α_2, α_3, α_1(쌍곡선은 β_3, β_2, β_1)을 작도하고, (3) 평면 α와 α_2(쌍곡선은 β와 β_3)의 교선 MN이 직선 AB와 수직임을 보이고, (4) 직선 MN, AB를 포함하는 절단평면 α(쌍곡선은 β)에 직교좌표계를 도입하여 곡선의 방정식을 유도하였다.

이와 같은 증명 과정의 유사성은 증명 방법의 확장이라는 측면에서 의미가 있다. 원뿔과 절단평면의 교선이 타원이 된다는 것을 학습했다면, 평면 β에 의한 원뿔의 절단이 쌍곡선이 된다는 것의 증명은 학습자의 근접발달영역에 들어갈 수 있으며, 학습자의 자립적인 탐구를 통해 증명할 가능성을 찾을 수 있다.

원뿔과 절단평면의 교선으로 포물선이 얻어지는 경우를 살펴보자. 절단평면 γ와 원뿔의 교선이 포물선이 되는 것은 평면 γ가 원뿔의 한 모선과 평행인 경우이다. 이제, 평면 γ가 원뿔의 모선 $A'C$와 평행이며, 평면 $A'CA$와 수직이라고 하자. 그리고 평면 γ와 원뿔의 교선이 평면 $A'CA$와 점 A에서 만난다고 하자(그림 13).

점 A, 평면 γ와 원뿔의 교선에 놓인 임의의 점 M을 지나며 원뿔의 축에 수직인 평면 γ_1, γ_2를 작도하자. 그러면, 평면 γ와 γ_2는 평면 $A'CA$와 수직이고, 정리 4에 의해 평면 γ와 γ_2의 교선 MN은 평면 $A'CA$와 수직이다. 즉, 직선 MN과 평면 $A'CA$의 직선 AN, QP는 수직이다. 그리고 정리 8에 의해 직선 AA'과 PQ는 평행이다.

한편, 평면 γ와 모선 $A'C$가 평행이고 직선 AN은 평면 γ와 $A'CA$의 교선이므로, 직선 AN과 모선 $A'C$는 평행이다.

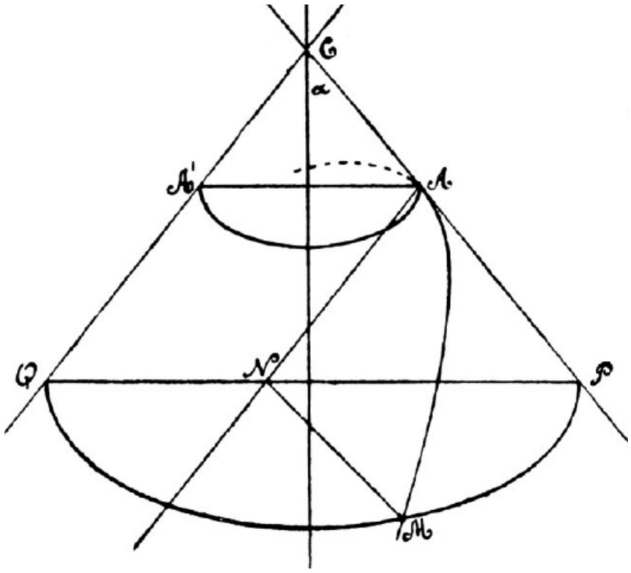

그림 13. 원뿔-포물선([13], p.86)

이제, 직선 AA'과 PQ의 평행으로부터 삼각형 NAP와 $A'CA$가 닮음이며, $\frac{\overline{AN}}{\overline{NP}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{AA'}}$이다. 이 등식에서 양변의 분모에 $\overline{AA'}$을 곱하면, $\frac{\overline{AN}}{\overline{NP}\cdot\overline{AA'}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{AA'}^2}$이 된다. 사각형 $QNAA'$이 평행사변형이므로, $\overline{AA'} = \overline{QN}$이다. 이것을 $\frac{\overline{AN}}{\overline{NP}\cdot\overline{AA'}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{AA'}^2}$의 좌변에 대입하면, $\frac{\overline{AN}}{\overline{NP}\cdot\overline{QN}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{AA'}^2}$이 된다.

평면 γ_2와 원뿔의 교선인 원 QP에서 할선의 성질로부터 $\overline{QN}\cdot\overline{NP} = \overline{MN}^2$이 얻어진다. 이를 얻어진 등식에 대입하면, $\frac{\overline{AN}}{\overline{MN}^2} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{AA'}^2}$이 된다.

이제, 직선 AN을 x축으로, 점 A를 지나 직선 MN에 평행인 직선을 y축으로 하는 직교좌표계를 생각하자(그림 14). 그림 14에서 원점 O가 점 A이다. M의 좌표를 (x, y)라 놓으면, 점 N의 좌표는 $(x, 0)$이 된다. 그리고 $\overline{ON} = \overline{AN} = x$, $\overline{NM} = y$이다. 그러면, 등식 $\frac{\overline{AN}}{\overline{MN}^2} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{AA'}^2}$은 $\frac{x}{y^2} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{AA'}^2}$이라 쓸 수 있다.

등식의 우변에 있는 식 $\frac{\overline{CA'}}{\overline{AA'}^2}$을 생각하자. 이를 위해 그림 13에서 삼각형 $CA'A$를 생각하자. 삼각형 $CA'A$는 이등변삼각형이므로, 그림 15와 같이 나타낼 수 있으며 $\angle ACH = \varphi = \frac{1}{2}\angle A'CA$이다. 직각삼각형 ACH에서 $\sin\varphi = \frac{\overline{AH}}{\overline{CA}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AA'}}{\overline{CA}}$이며, $2\sin\varphi = \frac{\overline{AA'}}{\overline{CA}}$이다.

등식 $2\sin\varphi = \frac{\overline{AA'}}{\overline{CA}}$의 양변에 $\overline{AA'}$을 곱하면, $2\sin\varphi\cdot\overline{AA'} = \frac{\overline{AA'}^2}{\overline{CA}}$이 된다. 이때 $\varphi = \frac{1}{2}\angle A'CA$는 원뿔에 의해 결정되는 일정한 값이다. 그리고 평면 γ에 의한 원뿔의 절단에 의해 점 A가 얻어지고 점 A를 지나 원뿔의 축에 수직인 평면 γ_1을 작도하면

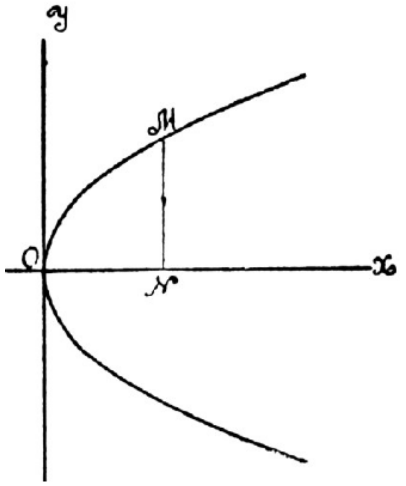

그림 14. 포물선([13], p.87)

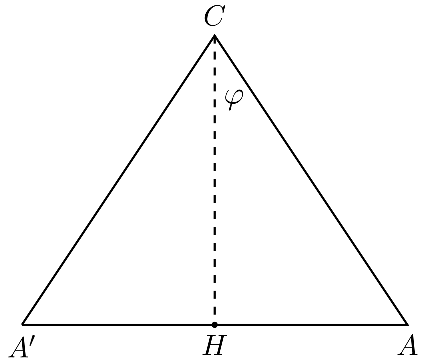

그림 15. 삼각형

$\overline{AA'}$가 얻어진다. 즉, $\overline{AA'}$도 평면 γ에 의한 원뿔의 절단에 의해 결정되는 값이므로, $2\sin\varphi\cdot\overline{AA'}$을 $4p$로 나타낼 수 있다. 결국, $\frac{\overline{AA'}^2}{\overline{CA}} = 4p$, $\frac{\overline{CA}}{\overline{AA'}^2} = \frac{1}{4p}$이 되며, $\frac{x}{y^2} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{AA'}^2}$는 $\frac{x}{y^2} = \frac{1}{4p}$, $y^2 = 4px$인 포물선의 방정식을 나타낸다. □

평면 γ에 의한 원뿔의 절단이 포물선이 되는 경우의 증명은 타원, 쌍곡선이 될 때의 증명과 비교하면 유사점과 차이점이 있다. 유사점은 첫째, 그림 13에서 직선 $A'A$, PQ의 평행으로부터 닮음인 삼각형 NAP와 $A'CA$를 생각하여 변들의 등식 $\frac{\overline{AN}}{\overline{NP}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{AA'}}$을 유도하는 것이며, 둘째 직교좌표계의 x축으로는 절단평면(타원, 쌍곡선, 포물선에 대해 각각 α, β, γ)과 평면(각각 ABC, ABC, $A'CA$)의 교선을 잡고, y축으로는 절단평면과 점 M을 지나 원뿔의 축에 수직인 평면(각각 α_2, β_3, γ_2)의 교선에 평행한 직선을 잡았다.

차이점으로는 첫째, 그림 13에서는 닮음인 삼각형을 한 쌍만 이용했기 때문에, 등식 $\frac{\overline{AN}}{\overline{NP}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{AA'}}$의 분모에 $\overline{AA'}$을 곱해서 선분의 곱 $\overline{NP}\cdot\overline{AA'}$, $\overline{AA'}^2$을 얻었다는 것이다. 둘째는 그림 14에서 등식 $\frac{\overline{AN}}{\overline{MN}^2} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{AA'}^2}$을 $\frac{x}{y^2} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{AA'}^2}$으로 변형시켰다. 이때, 등식의 우변 $\frac{\overline{CA'}}{\overline{AA'}^2}$을 정리하기 위해, 평면 $A'CA$에서 그림 15의 이등변삼각형을 생각하여 $2\sin\varphi\cdot\overline{AA'} = 4p$로 놓았다. 이를 바탕으로, 포물선의 방정식을 유도하였다. 이런 측면에서 보면, 절단면이 타원, 쌍곡선이 되는 경우보다 포물선인 경우의 증명이 다양한 수학적 추론 과정과 지식을 필요로 한다는 것을 알 수 있다.

살펴본 포물선인 경우의 증명에는 앞에서 기술한 공간도형의 정리들 이외에 다음 정리가 추가로 사용되었다.

정리 9. 평면 β에 속하는 직선 l이 평면 α와 평행이며, 평면 α와 β가 만난다. 그러면, 평면 α와 β의 교선은 직선 l과 평행하다([5]의 정리 1.12).

정리 9는 직선 AN과 모선 $A'C$가 평행이라는 것을 유도하는데 필요하다. 즉, 평면 $A'CA$에 속하는 모선 $A'C$는 평면 γ와 평행이며, 평면 γ와 $A'CA$의 교선은 AN이다. 그러므로, 정리 9에 의해 직선 AN과 모선 $A'C$가 평행이다.

3.3. 요약 및 결론

원뿔을 평면으로 절단하여 타원, 쌍곡선, 포물선을 유도하는 것은 수학의 발생적 측면을 이해하고, 수학에 대한 직관적 이해, 흥미 유발의 측면에서 교수학적으로 가치가 있을 것이다. 원뿔을 잘라 타원, 쌍곡선, 포물선을 얻는 그림을 쉽게 볼 수 있지만, 우리나라의 '기하' 교과목에서는 이 곡선들을 원뿔의 절단으로서 정의하지는 않는다.

본 연구에서는 원뿔의 절단으로서 타원, 쌍곡선, 포물선을 유도하는 방법을 조사하여, 중등학교인 Real Gymnasium의 수학 교과서로 1908년에 출판된 '평면에서 해석기하학의 기초'와 1916년에 출판된 '간략한 평면 해석기하학 강의'에서 주목할 만한 접근 방법을 찾았다.

'평면에서 해석기하학의 기초'에서는 단델린의 구를 이용한 증명을 제시하고 있지만, 평면에서 삼각형(각)의 내접원, 방접원을 각의 이등분선을 중심으로 회전시켜 원뿔, 원뿔에 내접하는 단델린의 구의 존재성에 대한 직관적인 이해를 시도하였다. 그리고 원뿔과 절단평면의 교선이 타원이 되는 경우에는 두 점(초점)으로부터 교선의 점까지의 거리의 합이 일정하다는 것을 보였고, 교선이 쌍곡선인 경우에는 두 점으로부터 교선의 점까지의 거리의 차가 일정하다는 것을, 포물선인 경우에는 교선의 점으로부터 한 점(초점)까지의 거리와 직선(준선)까지의 거리가 같다는 것을 유도하였다.

'평면에서 해석기하학의 기초'에서 평면도형인 삼각형, 삼각형의 내접원, 외접원을 회전시켜 공간도형인 원뿔, 단델린의 구를 얻는 접근 방법은 (1) 단델린의 구의 존재성에 대한 직관적인 이해, (2) 단델린의 구를 이용한 타원, 쌍곡선, 포물선에 대한 간결한 증명 방법의 측면에서 가치가 있을 것이다. 그리고 국내외 문헌에서 많이 다루는 단델린의 구를 이용한 증명에서 부족했던 단델린의 구의 존재성에 대한 직관적 이해를 보완할 수 있을 것으로 생각된다.

'간략한 평면 해석기하학 강의'에서는 단델린의 구를 사용하지 않고, 평면들(직선들)의 수직과 평행의 성질 등을 이용하여 직교좌표계의 설정하고, 직교좌표계에서 삼각형의 닮음, 원의 할선의 성질, 이등변삼각형의 성질, 삼각함수 등을 이용하여 타원, 쌍곡선, 포물선의 방정식을 유도하였다. 여기서는 '평면에서 해석기하학의 기초'에서와 같이 초점으로부터 거리의 합과 차, 초점과 준선으로부터의 거리 등을 유도하지 않고, 원뿔과

절단평면의 교선의 기하학적 성질을 기반으로 타원, 쌍곡선, 포물선의 방정식을 유도했다는 점에서 주목할 만하다. 특히, 원뿔의 절단이라는 구체적인 활동을 타원, 쌍곡선, 포물선의 방정식과 연결지었다는 측면에서 의미가 있다.

우리나라의 고등학교 '기하' 교과서에서는 초점으로부터 거리의 합과 차, 초점과 준선으로부터의 거리를 이용하여 타원, 쌍곡선, 포물선을 정의하고, 이들의 방정식을 유도하고 있다. '평면에서 해석기하학의 기초'에 제시된 내용은 초점으로부터 거리의 합과 차, 초점과 준선으로부터의 거리 관계를 이용하지 않고, 원뿔의 절단에서 절단평면에 직교좌표계를 설정하여 타원, 쌍곡선, 포물선의 방정식을 유도하였다는 측면에서 주목할 만하다.

본 연구의 결과는 원뿔과 절단평면의 교선으로서 타원, 쌍곡선, 포물선을 이해하는 데 도움을 줄 수 있으며, 고등학교에서 다루는 타원, 쌍곡선, 포물선의 정의를 원뿔의 절단과 관련지어 이해하는 데도 의미가 있을 것으로 기대된다.

References

1. Aleksandrov, V.M. (1908). *Foundations of Analytic Geometry in the Plane.* Printing House of G. Lissner and D. Sobko. (In Russian)
2. Dorfman, A. G. (1959). *Optics of conic sections.* Fizmatgiz. (In Russian)
3. Dynnikov, I.A. (Retrieved February 20, 2025, from URL). Anaytic Geometry. `https://teach-in.ru/file/synopsis/pdf/analytic-geometry-dynnikov-M.pdf` (In Russian)
4. Han, I. (2019). *Learning the History of Mathematics and Understanding Mathematics.* Kyowoo.
5. Han, I. (2022). *Learning Polyhedra and Understanding Space.* Kyowoo.
6. Izvolsky, N. A. (1941). *Synthetic geometry.* Uchpedgiz. (In Russian)
7. Jang, M., & Gang, S. (2013). How To Teach The Quadratic Curves Through Historical Overview. *Communications of mathematical education, 24*(3), 731-744.
8. Kalinin, A. Yu., & Tereshin, D.A. (2001). *Solid Geometry 11.* MFTI. (In Russian)
9. Ko, S., Lee, J., Lee, S., Cha, S., Kim, E., & Cho, S. (2019). *High School Geometry.* Joeunchaek-Sinsago.
10. Ko, S., Lee, J., Lee, S., Cha, S., Kim, E., & Cho, S. (2019). *Teacher's Guide for High School Geometry.* Joeunchaek-Sinsago.
11. Lee, J. (2013). Historical Development of Conic Section Theory. *Journal for history of mathematics, 15*(1), 69-82.
12. Lee, S., & Cho, W. (2013). Analysis of Mathematics Teachers' Mathematical Content Knowledge about Quadratic Curves. *School Mathematics, 15*(4), 995-1013.

13. Sintsov, D. M. (1916). *A brief course in analytic geometry in the plane.* Sytin Publishing House. (In Russian)

[a] Inki Han, Professor, Gyeongsang National University:
Email address: inkiski@gnu.ac.kr