J. Korean Soc. Math. Edu. Ser. B: Theoretical Math. Pedagogical Math.
https://doi.org/10.7468/jksmeb.2025.32.2.139 ISSN(Print) 3059-0604
Volume 32, Number 2 (May 2025), Pages 139–151 ISSN(Online) 3059-1309

예비수학교사의 수학화 능력의 신장을 위한 일반화된 피보나치 수열의 항등식 탐구
INQUIRY SOME IDENTITIES FOR THE GENERALIZED FIBONACCI SEQUENCE TO ENHANCE PRESERVICE MATHEMATICS TEACHERS' MATHEMATISING ABILITY

허남구 [a]

Abstract. Mathematising is emphasized in school mathematics and is considered a core competency for preservice teachers as they prepare to instruct future students. To enhance their mathematising skills, preservice mathematics teachers must engage in meaningful mathematising experiences. One such experience involves transforming the phainomenon of the Fibonacci sequence into nooumenon through the processes of generalization and abstraction. In the present study, three novel identities and twelve corollaries related to the generalized Fibonacci sequence are presented, contributing to the mathematical foundation necessary for fostering mathematising abilities.

1. 서론

수학화는 현상을 본질로 조직하는 수학적 활동으로, 현상은 실생활의 소재를 포함하여 이미 알고 있는 수학적 지식을 의미한다. 수학화를 통해 현상이 본질로 조직되면, 조직된 그 본질은 다시 새로운 수학화를 위한 현상이 된다. 수학화에는 일반화, 추상화, 관점의 전환 등이 있으며, 대부분의 수학적 활동은 수학화의 반복을 통해 발달한다([2], [3]). 2022 개정 수학과 교육과정([20])은 수학 교과 역량으로 '수학의 개념, 원리, 법칙을 연계하여 새로운 지식을 생성하는 것, 수학을 실생활이나 타 교과의 지식, 기능, 경험에 적용할 수 있는 것, 실생활이나 타 교과의 지식, 기능, 경험을 수학적으로 해석하는 것'을 의미하는 연결을 제시하였으며, 내용 체계에서는 '주요한 수학의 개념, 원리, 법칙 등이 어떻게 발생하고 확장되며 그 결과로 어떤 일반성과 추상성을 획득하는지, 수평적으로

Received by the editors April 12, 2025. Revised May 7, 2025. Accepted May 15, 2025.
2020 *Mathematics Subject Classification.*97F60, 97I30.
Key words and phrases. Mathematising, Fibonacci sequence, Generalized Fibonacci sequence, Fibonacci identity, Generalized Fibonacci identity
주요어: 수학화, 피보나치 수열, 일반화된 피보나치 수열, 피보나치 항등식, 일반화된 피보나치 항등식

또는 수직적으로 어떻게 상호 관련되는지, 어떤 탐구 과정을 중점적으로 강조하는지 등을 압축하여 제시한 것'을 의미하는 핵심 아이디어를 강조하고 있다. 2022 개정 수학과 교육과정([20])의 연결 역량과 핵심 아이디어는 수학화와 관련된 것으로, 추후 학생에게 수학을 지도하게 될 예비수학교사는 수학화 능력을 함양할 필요가 있다. 본 연구에서는 예비수학교사가 일반화와 추상화 과정을 통해 현상에서 본질로 조직하는 수학화의 능력을 신장시킬 수 있는 소재를 개발하고자 한다.

피보나치 수열은 수학에서 중요하게 다루어지는 주제로서, 과학, 예술, 금융 등 다양한 분야에서 활용되고 있다([7], [16], [19], [21], [26]). 피보나치 수열은 경우의 수와 수열을 학습하는 과정이나([14], [15]) 재귀 호출과 관련된 문제를 프로그래밍하는 과정에서 다루어진다([10]). 또한 영재교육 수준에서는 피보나치 수열을 변형한 수열의 특징이 다루어지기도 한다([22]). 이처럼 학교 교육에서 중요하게 다루어지는 피보나치 수열 $\{F_n\}$은 초깃값이 $F_0 = 0, F_1 = 1$이고 점화식이 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geq 2)$인 수열로 정의된다.

피보나치 수열과 유사한 수열로 루카스(Lucas) 수열, 펠(Pell) 수열 등이 있다. 루카스 수열 $\{L_n\}$은 초깃값이 $L_0 = 2, L_1 = 1$이고 점화식이 $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ $(n \geq 2)$인 수열이며, 펠 수열 $\{P_n\}$은 초깃값이 $P_0 = 0, P_1 = 1$이고 점화식이 $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ $(n \geq 2)$인 수열이다. 피보나치 수열과 루카스 수열, 펠 수열은 모두 2차 선형 재귀 관계라는 공통점이 있으며, 특히 루카스 수열은 피보나치 수열과 초깃값만 다를 뿐 점화식은 같다. 또한 루카스 수열의 n번째 항인 L_n은 피보나치 수열의 두 항 F_{n-1}, F_{n+1}과 $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$의 관계를 보여주고 있다. 즉, 루카스 수열의 특징은 피보나치 수열의 특징과 관련되어 있을 수 있으며, 더 나아가 점화식이 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$인 수열 $\{a_n\}$도 피보나치 수열과 관련된 성질을 가질 수 있다.

피보나치 수열을 일반화한 수열에 관한 연구가 이루어지고 있다. 일반화된 피보나치 수열은 연구에 따라 다양하게 정의되고 있다. 첫째, Horadam([5]), Yang과 Kim([27])은 일반화된 피보나치 수열 $\{G_n\}$을 초깃값이 $G_0 = a, G_1 = b$이고 점화식이 $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$ $(n \geq 2)$인 수열로 정의하였다. 이때, 수열 $\{G_n\}$은 $a = 0, b = 1$이면 피보나치 수열이고, $a = 2, b = 1$이면 루카스 수열이다. 둘째, Horadam([6]), Kalman과 Mena([8])는 일반화된 피보나치 수열 $\{G_n\}$을 초깃값이 $G_0 = a, G_1 = b$이고 점화식이 $G_n = pG_{n-1} + qG_{n-2}$ $(n \geq 2)$인 수열로 정의하였다. 이때, 수열 $\{G_n\}$은 $a = 0, b = 1, p = q = 1$이면 피보나치 수열이고, $a = 2, b = 1$, $p = q = 1$이면 루카스 수열이다. 셋째, Miles([18])는 일반화된 피보나치 수열 $\{G_n\}$을 초깃값이 $G_0 = \cdots = G_{k-2} = 0$, $G_{k-1} = 1$이고 점화식이 $G_n = G_{n-1} + G_{n-2} + \cdots + G_{n-k}$ $(n \geq k)$인 수열로 정의하였으며, 이를 $k-$일반화된 피보나치 수열이라 하였다. 넷째, Kim과 Park([12])은 일반화된 피보나치 수열 $\{G_n\}$을 초깃값이 $G_0 = 0$, $G_n = 2^{n-1}$ $(1 \leq n < k)$이고 점화식이

$G_n = G_{n-1} + G_{n-2} + \cdots + G_{n-k}$ $(n \geq k)$인 수열로 정의하였으며, 이를 $k-$일반화된 피보나치 수열이라 하였다. 이처럼 학자와 연구에 따라 일반화된 피보나치 수열을 다양한 방법으로 정의하였으며, 각각의 정의를 따르는 일반화된 피보나치 수열에서의 항등식을 제시하고 있다([5], [6], [8], [9], [12], [18], [22], [24], [25], [27]).

본 연구에서는 Horadam([5]), Yang과 Kim([27])이 정의한 것과 같이 초깃값이 $G_0 = a, G_1 = b$이고 점화식이 $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$ $(n \geq 2)$인 수열을 일반화된 피보나치 수열 $\{G_n\}$로 정의하고, 예비수학교사의 수학화 능력을 신장시키기 위한 소재로 일반화된 피보나치 수열의 항등식에 대해 연구하였다.

2. 연구의 배경

2.1. 피보나치 수열에 관한 학교 교육

피보나치 수열은 대표적인 2차 선형 재귀 관계를 갖는 수열로서, 규칙적으로 나열된 대상을 수학적으로 표현하고 이해하는 것을 목적으로 하는 대수 과목의 핵심 아이디어와 연결되어 있다([20]). 또한 피보나치 수열의 n번째 항인 F_n의 값을 구하는 문제는 계단을 올라가는 모델, 동전과 관련된 모델 등 경우의 수와 관련지어 탐구해 볼 기회를 제공해 준다. 이러한 점에서 피보나치 수열은 학교수학에서 학생이 탐구할 수 있는 과제로 자주 사용되고 있다. 그림 1은 고등학교 수학교과서에 등장하는 과제를 나타낸 것으로, 계단을 올라가는 모델에서 조합을 이용하여 피보나치 수 F_7의 값을 구하는 과제를 나타낸 것이다. 이 과제에서는 피보나치 수열의 귀납적 정의나 일반항을 다루지 않고, 피보나치 수열이 조합과 곱의 법칙을 사용하여 경우의 수를 구하는 과제의 소재로 이용되고 있다.

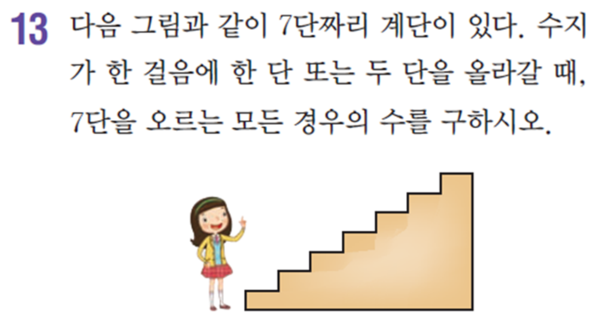
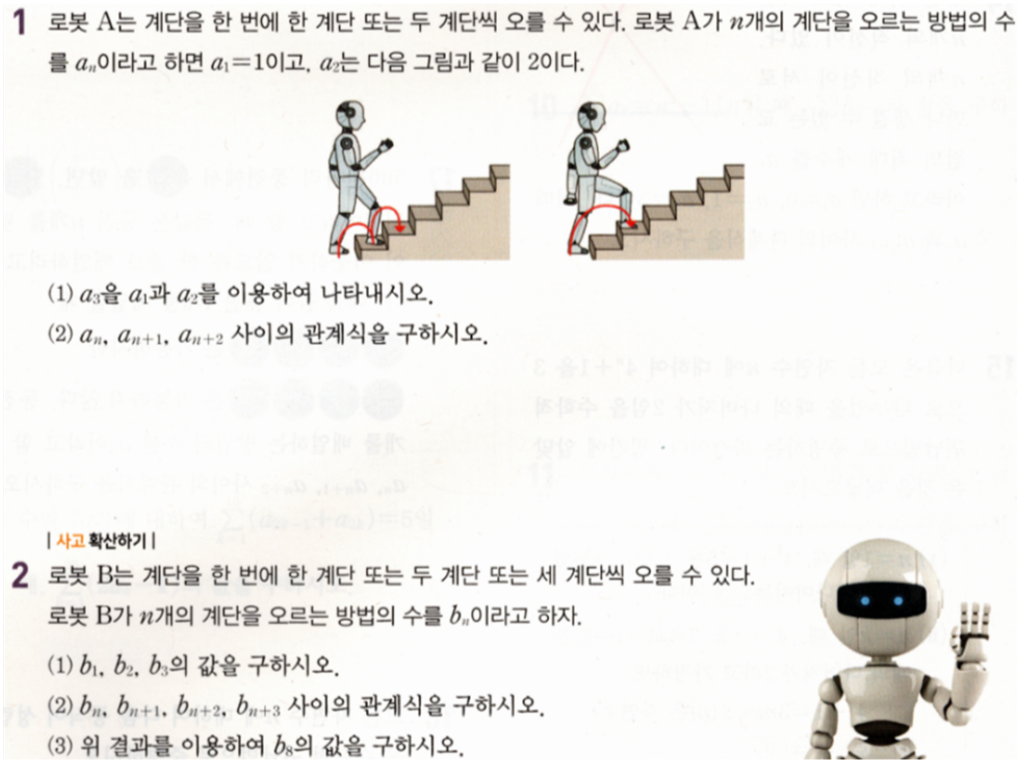


그림 1. 경우의 수에서의 피보나치 수열 ([15], p. 259)

대수 과목의 수열 단원에서는 수열의 귀납적 정의를 다루고 있으며, 이때 수열과 관련된 여러 문제를 귀납적으로 표현할 수 있지만 그 순열의 일반항을 구하는 문제는 다루지 않도록 제시하고 있다([20]). 그림 2는 고등학교 수학교과서에 등장하는 과제를 나타낸 것으로, 학생이 계단을 올라가는 모델에서 피보나치 수열의 연속된 세 항 사이의 관계를 탐구하고 이를 점화식을 나타낼 수 있도록 제시하고 있다. 더 나아가 3-일반화한 피보나치 수열의 형태인 문제로 변형하여 일반화된 피보나치 수열의 연속된 네 항 사이의 관계를 탐구하고 이를 점화식으로 나타낼 수 있도록 제시하고 있다.



1 로봇 A는 계단을 한 번에 한 계단 또는 두 계단씩 오를 수 있다. 로봇 A가 n개의 계단을 오르는 방법의 수를 a_n이라고 하면 $a_1=1$이고, a_2는 다음 그림과 같이 2이다.

(1) a_3을 a_1과 a_2를 이용하여 나타내시오.

(2) a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 사이의 관계식을 구하시오.

| 사고 확산하기 |

2 로봇 B는 계단을 한 번에 한 계단 또는 두 계단 또는 세 계단씩 오를 수 있다. 로봇 B가 n개의 계단을 오르는 방법의 수를 b_n이라고 하자.

(1) b_1, b_2, b_3의 값을 구하시오.

(2) b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, b_{n+3} 사이의 관계식을 구하시오.

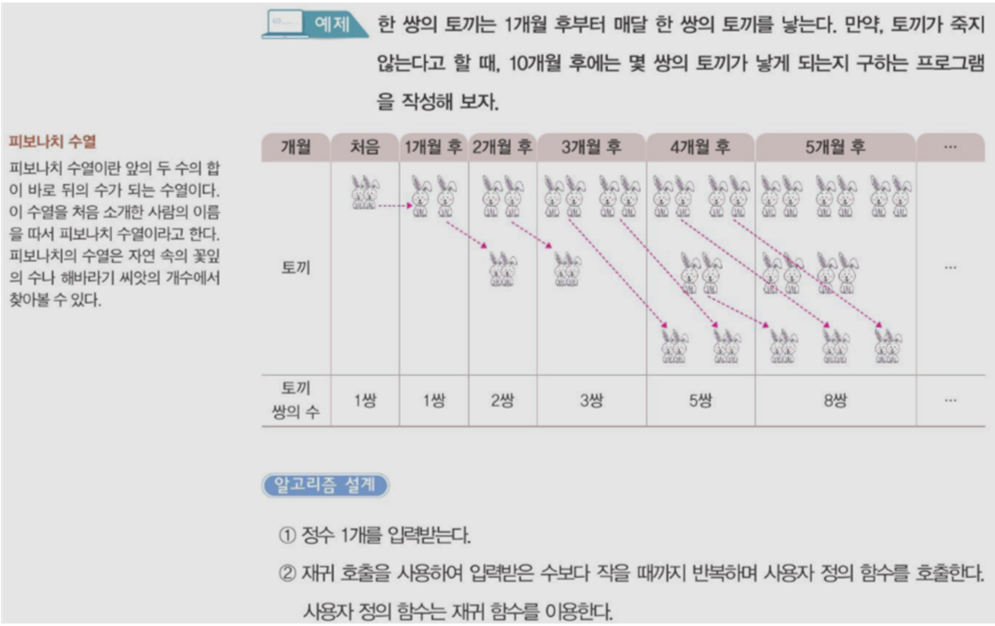
(3) 위 결과를 이용하여 b_8의 값을 구하시오.

그림 2. 수열에서의 피보나치 수열 ([14], p. 152)

정보과의 프로그래밍 과목은 재귀 함수를 이용한 프로그래밍을 다루고 있다. 피보나치 수열은 대표적인 재귀 관계를 보여주어 그림 3과 같이 피보나치 수열이 과제의 소재로 사용되고 있다.

피보나치 수열은 교사와 학생을 위한 교수학습의 소재로 사용될 수 있다. 피보나치 수열은 학생이 수학과의 추론과 연결성을 함양할 수 있도록 수업을 설계할 수 있는 소재로 사용될 수 있으며([23]), 수학과 음악을 융합한 STEAM 교육의 소재로 사용될

수 있다([17]). 또한 교사가 수학화를 경험할 수 있는 교사 교육의 소재로도 사용될 수 있다([11], [12]).



예제 한 쌍의 토끼는 1개월 후부터 매달 한 쌍의 토끼를 낳는다. 만약, 토끼가 죽지 않는다고 할 때, 10개월 후에는 몇 쌍의 토끼가 낳게 되는지 구하는 프로그램을 작성해 보자.

피보나치 수열

피보나치 수열이란 앞의 두 수의 합이 바로 뒤의 수가 되는 수열이다. 이 수열을 처음 소개한 사람의 이름을 따서 피보나치 수열이라고 한다. 피보나치의 수열은 자연 속의 꽃잎의 수나 해바라기 씨앗의 개수에서 찾아볼 수 있다.

개월	처음	1개월 후	2개월 후	3개월 후	4개월 후	5개월 후	…
토끼							…
토끼 쌍의 수	1쌍	1쌍	2쌍	3쌍	5쌍	8쌍	…

알고리즘 설계

① 정수 1개를 입력받는다.

② 재귀 호출을 사용하여 입력받은 수보다 작을 때까지 반복하며 사용자 정의 함수를 호출한다. 사용자 정의 함수는 재귀 함수를 이용한다.

그림 3. 피보나치 수열의 프로그래밍 ([10], p. 136)

2.2. 피보나치 수열의 일반항과 항등식

피보나치 수열은 2차 선형 재귀 관계를 갖는 대표적인 수열로서 초깃값이 $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ 고 점화식이 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geq 2)$인 수열이다. 프랑스의 수학자 비네(Binet)는 피보나치 수열의 일반항 F_n을 구하였으며, 이를 Binet 공식이라고 부른다([1]). 비네가 구한 피보나치 수열의 일반항 F_n은 다음과 같다.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

특성방정식을 이용하여 구한 루카스 수열과 일반화된 피보나치 수열에 대한 비네 공식 L_n과 G_n은 다음과 같다.

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$G_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad (C_1, C_2\text{는 상수})$$

피보나치 수열에 대한 잘 알려진 항등식은 다음과 같다([4], [16]).

(1) $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n-1}$ [Cassini's identity]

(2) $F_n^2 - F_{n+m}F_{n-m} = (-1)^{n-m}F_m^2$ [Catalan's identity]

(3) $F_{m+1}F_n - F_mF_{n+1} = (-1)^m F_{n-m}$ [d'Ocagne's identity]

(4) $F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1} = F_{m+n}$ [Honsberger's identity]

피보나치 수열과 루카스 수열 사이의 관계를 나타내는 대표적인 항등식은 다음과 같다 ([1]).

(1) $L_{m+n} = L_{m+1}F_n + L_mF_{n-1}$

(2) $F_{2n} = L_nF_n$

(3) $L_{2n} = 5{F_n}^2 + 2(-1)^n$

(4) $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$

(5) $5F_n = L_{n-1} + L_{n+1}$

3. 연구 결과 및 결론

본 연구에서는 일반화된 피보나치 수열에 대한 항등식 3개와 따름 정리를 제시하고자 한다. 이를 위해 피보나치 수열, 루카스 수열과 일반화된 피보나치 수열의 n번째 항은 각각 F_n, L_n과 G_n으로 나타내었으며, 두 상수 ϕ와 ψ는 $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$과 $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$로 나타내었다.

3.1. 루카스 수열과 일반화된 피보나치 수열 사이의 관계

피보나치 수열과 루카스 수열에 관한 급수는 $\sum\limits_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$, $\sum\limits_{k=0}^{n} L_k = L_{n+2} - 1$로 알려져 있다. 본 절에서는 피보나치 수열과 루카스 수열의 급수를 일반화하여 일반화된 피보나치 수열에 관한 급수$\sum\limits_{k=0}^{n} G_{m+kt}$ (m과 t는 자연수)를 구하고, 그 특수한 경우로서$\sum\limits_{k=0}^{n} G_k$를 제시하고자 한다. 이를 위해 일반화된 피보나치 수열의 $n-m$, n, $n+m$번째 항인 G_{n-m}, G_n, G_{n+m} 사이의 관계를 루카스 수열의 m번째 항인 L_m을 이용하여 나타내었다.

정리 1. $G_{n+m} + (-1)^m G_{n-m} = G_nL_m$

위의 정리 1은 루카스 수열과 일반화된 피보나치 수열의 비네 공식을 이용하여 증명할 수 있다. 루카스 수열 $\{L_n\}$과 일반화된 피보나치 수열 $\{G_n\}$의 비네 공식은 각각

$$L_n = \phi^n + \psi^n,\ G_n = C_1\phi^n + C_2\psi^n (C_1,\ C_2\text{는 상수})$$

이므로

$$\begin{aligned} G_{n+m} - G_n L_m &= (C_1\phi^{n+m} + C_2\psi^{n+m}) - (C_1\phi^n + C_2\psi^n)(\phi^m + \psi^m) \\ &= -(C_1\phi^n\psi^m + C_2\phi^m\psi^n) \\ &= -\phi^m\psi^m(C_1\phi^{n-m} + C_2\psi^{n-m}) \\ &= -(-1)^m(C_1\phi^{n-m} + C_2\psi^{n-m}) \\ &= -(-1)^m G_{n-m} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $G_{n+m} + (-1)^m G_{n-m} = G_n L_m$이다.

정리 1의 식에서 m의 값을 n으로 정하고, 일반화된 피보나치 수열 $\{G_n\}$을 각각 피보나치 수열 $\{F_n\}$과 루카스 수열 $\{L_n\}$라 하면 다음의 두 따름 정리를 얻을 수 있다.

따름 정리 2. $F_{2n} = L_n F_n$

따름 정리 3. $L_{2n} = {L_n}^2 + 2(-1)^{n+1}$

일반화된 피보나치 수열 $\{G_n\}$의 부분수열에 대한 부분합과 관련된 다음과 같은 따름 정리를 얻을 수 있다. 따름 정리 4와 5는 $n_k = n + km$ (d는 자연수)인 부분수열 $\{G_{n_k}\}$에서의 부분합을 나타낸 것이고, 따름 정리 6은 따름 정리 4에서 n의 값과 m의 값에 각각 0과 1을 대입한 것으로 $\sum_{t=0}^{k} G_t$를 구한 것이다.

따름 정리 4. 홀수 m에 대하여 $\sum_{t=0}^{k} G_{n+tm} = \frac{G_{n+(k+1)m} + G_{n+km} - G_{n-m} - G_n}{L_m}$이다.

따름 정리 4는 정리 1을 이용하여 만든 $k+1$개의 등식을 더하여 증명할 수 있다. 정리 1에 의해 다음 $k+1$개의 등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} G_{n+m} - G_{n-m} &= G_n L_m \\ G_{n+2m} - G_n &= G_{n+m} L_m \\ G_{n+3m} - G_{n+m} &= G_{n+2m} L_m \\ &\vdots \\ G_{n+(k+1)m} - G_{n+(k-1)m} &= G_{n+km} L_m \end{aligned}$$

이때, $k+1$개의 등식의 양변을 모두 더하면

$$G_{n+(k+1)m} + G_{n+km} - G_{n-m} - G_n = L_m \sum_{t=0}^{k} G_{n+tm}$$

이다. 따라서

$$\sum_{t=0}^{k} G_{n+tm} = \frac{G_{n+(k+1)m}+G_{n+km}-G_{n-m}-G_n}{L_m}$$

이다.

따름 정리 5. 짝수 m에 대하여 $\sum_{t=0}^{k} G_{n+tm} = \frac{G_{n+(k+1)m}-G_{n+km}-G_n+G_{n-m}}{L_m-2}$이다.

따름정리 5도 따름정리 4과 마찬가지로 정리 1을 이용하여 만든 $k+1$개의 등식을 더하여 증명할 수 있다. 정리 1에 의해 다음 $k+1$개의 등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} G_{n+m} + G_{n-m} &= G_n L_m \\ G_{n+2m} + G_n &= G_{n+m} L_m \\ G_{n+3m} + G_{n+m} &= G_{n+2m} L_m \\ &\vdots \\ G_{n+(k+1)m} + G_{n+(k-1)m} &= G_{n+km} L_m \end{aligned}$$

이때, $k+1$개의 등식의 양변을 모두 더하면

$$\sum_{t=0}^{k} G_{n+tm} - G_n + G_{n+(k+1)m} + \sum_{t=0}^{k} G_{n+tm} - G_{n+km} + G_{n-m} = L_m \sum_{t=0}^{k} G_{n+tm}$$

이다. 따라서

$$\sum_{t=0}^{k} G_{n+tm} = \frac{G_{n+(k+1)m}-G_{n+km}-G_n+G_{n-m}}{L_m-2}$$

이다.

따름 정리 6. $\sum_{t=0}^{n} G_t = G_{n+2} - G_1$

따름정리 6은 따름정리 4의 식에 $n=0$, $m=1$을 대입하여 얻을 수 있다. 따름정리 4의 식에 $n=0$, $m=1$을 대입하면

$$\sum_{t=0}^{k} G_t = \frac{G_{k+1}+G_k-G_{-1}-G_0}{L_1}$$

이다.

$L_1 = 1$, $G_k + G_{k+1} = G_{k+2}$이고, 일반화된 피보나치 수열의 항을 음의 범위까지 확장하면 점화식으로부터 $G_{-1} + G_0 = G_1$임을 알 수 있다. 따라서 위의 식을 간단히 정리하면

$$\sum_{t=0}^{n} G_t = G_{n+2} - G_1$$

이다 . 따름정리 7과 따름정리 8은 일반화된 피보나치 수열 $\{G_n\}$이 각각 피보나치 수열 $\{F_n\}$과 루카스 수열 $\{L_n\}$인 경우일 때를 나타낸 것이다.

따름 정리 7. $\sum_{t=0}^{n} F_t = F_{n+2} - 1$

따름 정리 8. $\sum_{t=0}^{n} L_t = L_{n+2} - 1$

3.2. 피보나치 수열과 일반화된 피보나치 수열 사이의 관계

피보나치 수열에 대한 d'Ocagne 항등식 $F_{m+1}F_n - F_mF_{n+1} = (-1)^m F_{n-m}$을 일반화하여 피보나치 수 열과 일반화된 피보나치 수열 사이의 관계로 나타내면 정리 9를 얻을 수 있으며, 특수한 경우로 d'Ocagne 항등식과 유사한 피보나치 수열과 루카스 수열 사이의 관계를 얻을 수 있다.

정리 9. $F_{m+1}G_{n+m} - F_mG_{n+m+1} = (-1)^m G_n$

위의 정리 9는 피보나치 수열과 일반화된 수열의 점화식을 이용하여 증명할 수 있다. 이를 위해 함수 $f(n,m)$을 $f(n,m) = F_{m+1}G_{n+m} - F_mG_{n+m+1}$이라 하자. 피보나치 수열과 일반화된 피보나치 수열의 점화식을 이용하면

$$\begin{aligned} f(n,m) + f(n,m+1) &= (F_{m+1}G_{n+m} - F_mG_{n+m+1}) \\ &\qquad + (F_{m+2}G_{n+m+1} - F_{m+1}G_{n+m+2}) \\ &= (F_{m+1}G_{n+m} - F_mG_{n+m+1}) + (F_mG_{n+m+1} \\ &\qquad + F_{m+1}G_{n+m+1} - F_{m+1}G_{n+m+2}) \\ &= F_{m+1}G_{n+m} + F_{m+1}G_{n+m+1} - F_{m+1}G_{n+m+2} = 0 \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$f(n,m+1) = -f(n,m)$$

임을 알 수 있다. 이때, $f(n,0) = G_n$ 이므로 $f(n,m) = (-1)^m G_n$이다.
즉, $F_{m+1}G_{n+m} - F_mG_{n+m+1} = (-1)^m G_n$이다.

정리 9의 식에서 일반화된 피보나치 수열 $\{G_n\}$을 피보나치 수열 $\{F_n\}$이라 하고, m의 값과 n의 값을 각각 $n-1$과 1이라 놓으면 따름 정리 10의 피보나치 수열에 대한 Cassini 항등식을 얻을 수 있다. 또한 정리 9의 식에서 일반화된 피보나치 수열 $\{G_n\}$을 피보나치 수열 $\{F_n\}$이라 하고, n의 값을 $n-m$이라 놓으면 따름 정리 11의 피보나치 수열에 대한 d'Ocagne 항등식을 얻을 수 있다. 또한 일반화된 피보나치 수열 $\{G_n\}$을 루카스 수열 $\{L_n\}$이라 하고, n의 값을 $n-m$이라 놓으면 따름정리 12를 얻을 수 있다.

따름 정리 10. [Cassini's identity] $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n-1}$

따름 정리 11. [d'Ocagne's identity] $F_{m+1}F_n - F_mF_{n+1} = (-1)^m F_{n-m}$

따름 정리 12. $F_{m+1}L_n - F_mL_{n+1} = (-1)^m L_{n-m}$

피보나치 수열과 일반화된 피보나치 수열의 비네 공식을 이용하면 정리 13과 같은 항등식을 구할 수 있다.

정리 13. $(-1)^{m+1}G_n + F_{m+1}(G_{n+m} + G_{n+m+2}) = G_{n+2m+2}$

피보나치 수열 $\{F_n\}$과 일반화된 피보나치 수열 $\{G_n\}$의 비네 공식은 각각

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \psi^n),\ G_n = C_1\phi^n + C_2\psi^n\ (C_1,\ C_2\text{는 상수})$$

이므로

$$\begin{aligned}
F_{m+1}(G_{n+m} + G_{n+m+2}) &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{m+1} - \psi^{m+1})\{C_1\phi^{n+m}(1+\phi^2) + C_2\psi^{n+m}(1+\psi^2)\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{m+1} - \psi^{m+1})\{C_1\phi^{n+m}(-\phi\psi+\phi^2) + C_2\psi^{n+m}(-\phi\psi+\psi^2)\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{m+1} - \psi^{m+1})\{C_1\phi^{n+m+1}(\phi-\psi) - C_2\psi^{n+m+1}(\phi-\psi)\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi-\psi)(\phi^{m+1} - \psi^{m+1})(C_1\phi^{n+m+1} - C_2\psi^{n+m+1}) \\
&= C_1\phi^{n+2m+2} - C_2(\phi\psi)^{m+1}\psi^n - C_1(\phi\psi)^{m+1}\phi^n + C_2\psi^{n+2m+2} \\
&= C_1\phi^{n+2m+2} + C_2\psi^{n+2m+2} - (-1)^{m+1}(C_1\phi^n + C_2\psi^n) \\
&= G_{n+2m+2} - (-1)^{m+1}G_n
\end{aligned}$$

이다. 따라서 $(-1)^{m+1}G_n + F_{m+1}(G_{n+m} + G_{n+m+2}) = G_{n+2m+2}$이다.

정리 13의 항등식에서 일반화된 피보나치 수열 $\{G_n\}$을 각각 피보나치 수열 $\{F_n\}$과 루카스 수열 $\{L_n\}$으로 놓으면 따름 정리 14와 따름 정리 15를 얻을 수 있다.

따름 정리 14. $(-1)^{k+1}F_n + F_{k+1}L_{n+k+1} = F_{n+2k+2}$

따름 정리 15. $(-1)^{k+1}L_n + 5F_{k+1}F_{n+k+1} = L_{n+2k+2}$

3.3. 결론

2022 개정 수학과 교육과정([20])은 연결 역량과 핵심 아이디어를 제시하는 과정에서 학생의 수학화 능력을 강조하고 있음을 알 수 있다. 학생의 수학화 능력을 신장시키기 위해서는 교사가 수학화 교수학습을 안내할 수 있어야 한다. 따라서 장차 중고등학교에서 학생에게 수학을 가르칠 예비수학교사도 수학화를 경험하고 수학화에 익숙해야 할 필요가 있다([13]). 예비수학교사가 현상을 본질로 수학화하는 훈련을 위해서는 적절한 소재를 이용하여 수학화를 경험할 수 있도록 해야 한다([13]). 이에 본 연구에서는 예비수학교사가 수학화의 대표적인 방법인 일반화와 추상화를 경험할 수 있도록([2], [3]),

예비수학교사에게 익숙한 수학적 소재인 피보나치 수열을 현상으로 선정하고 일반화된 피보나치 수열의 항등식을 탐구할 수 있도록 고안하였다.

본 연구에서는 유추, 일반화, 추상화를 통해 새로운 정리 3개를 발견하였으며, 정리 3개로부터 따름 정리 12개를 유도하였다. 첫째, 루카스 수열과 일반화된 피보나치 수열 사이의 관계에 대한 정리 1개와 따름정리 7개를 제시하였다. 피보나치 수열과 루카스 수열의 합을 일반화하여 일반화된 피보나치 수열에서의 합 $\sum_{t=0}^{n} G_t = G_{n+2} - G_1$을 유도하였으며, 이를 위해 일반화된 피보나치 수열의 부분순열 $G_{n_k} = G_{n+mk}$와 루카스 수열 L_m 사이의 관계 $G_{n+m} + (-1)^m G_{n-m} = G_n L_m$을 증명하였다. 이는 피보나치 수열에서의 합과 관련된 성질로부터 수학화를 통해 일반화된 피보나치 수열 G_n과 그 부분수열 G_{n_k}에서의 합을 탐구할 수 있다는 점에서 의의가 있다.

둘째, 루카스 수열과 일반화된 피보나치 수열 사이의 관계에 대한 정리 2개와 따름 정리 5개를 제시하였다. 피보나치 수열에서의 d'Ocagne 항등식 $F_{m+1}F_n - F_m F_{n+1} = (-1)^m F_{n-m}$을 일반화하여 일반화된 피보나치 수열에서의 $F_{m+1}G_{n+m} - F_m G_{n+m+1} = (-1)^m G_n$을 증명하였으며, d'Ocagne 항등식과 유사한 피보나치 수열과 루카스 수열 사이의 관계 $F_{m+1}L_n - F_m L_{n+1} = (-1)^m L_{n-m}$ 등의 따름 정리를 얻을 수 있다. 또한 $(-1)^{m+1}G_n + F_{m+1}(G_{n+m} + G_{n+m+2}) = G_{n+2m+2}$를 증명함으로써 피보나치 수열과 일반화된 피보나치 수열 사이의 새로운 항등식을 도출하였으며, 2개의 따름 정리를 제시하였다.

피보나치 수열은 예비수학교사의 수학화 능력을 신장시키기 위한 소재로 활용된 바 있다([11]). Kim과 Park([11])의 연구에서는 예비수학교사가 분할 모델과 일반화된 피보나치 수열의 관계를 탐구하는 과정에서 수학화 능력을 함양할 수 있다고 하였다. 본 연구에서는 일반화된 피보나치 수열과 피보나치 수열, 루카스 수열의 항 사이에서 패턴을 찾고 이를 증명하는 과정을 살펴보았다. 더 나아가 일반화된 피보나치 수열의 항등식의 특수한 사례로서 피보나치 수열과 루카스 수열에서의 대표적인 항등식을 살펴보았다. 예비수학교사는 이러한 활동을 통해 현상으로서의 수학을 본질로 조직하는 경험을 할 수 있으며, 일반화와 추상화를 통한 수학화 경험을 통해 장차 중등학교에서 학생에게 수학화 교수학습을 안내할 수 있는 능력을 함양할 수 있을 것으로 보인다.

References

1. Burton, D. M. (1998). *Elementary Number Theory.* McGraw-Hill.
2. Chong, Y. O. (1997). *A Study on Freudenthal's mathematising instuction theory.* Doctoral dissertation, Seoul National University.
3. Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Kluwer Academic Publishers.

4. Heo, N. G. (2024). Visual Proof of Catalan's Identity for the Fibonacci Numbers. *The Mathematical Intelligencer, 46*, 331. https://doi.org/10.1007/s00283-024-10340-7
5. Horadam, A. F. (1961). The generalized Fibonacci sequences. *Amer. Math. Monthly, 68*(5), 455-459. https://doi.org/10.1080/00029890.1961.11989696
6. Horadam, A. F. (1965). Basic Prperties of a Certain Generalised Sequence of Numbers. *Fib. Quart. 3*(3), 161-176. https://doi.org/10.1080/00150517.1965.12431416
7. Hwang, S. J. (2020). A Study on Convergence Fashion Design Using Fibonacci Sequence -Focused on the development of laser cutting techniques-. *The Korean Society of Science & Art, 38*(4), 491-500. https://doi.org/10.17548/ksaf.2020.09.30.491
8. Kalman, D., & Mena, R. (2003). The Fibonacci Numbers: Exposed. *Mathematics Magazine, 76*(3), 167-181. https://doi.org/10.1080/0025570X.2003.11953176
9. Kaygisiz, K., Sahin, A., (2013). A new method to compute the terms of generalized order- Fibonacci numbers. *J. Number Theory, 133*(9), 3119-3126. https://doi.org/10.1016/j.jnt.2013.03.007
10. Kim, G., Lee, J., Jang, B., & Yang, J. (2018). *High school Programming.* Cmass.
11. Kim, J. H., & Park, K. S. (2008). A Design of Teaching Unit to Foster Secondary pre-service Teachers' Mathematising Ability: Exploring the relationship between partition models and generalized Fibonacci sequences. *The journal of educational research in mathematics, 18*(3), 373-389.
12. Kim, J. H., & Park, K. S. (2009). A Design of Teaching Unit for Secondary Pre-service Teachers to Explore Generalized Fibonacci Sequence. *School Mathematics, 11*(2), 243-260.
13. Kim, J. H., Park, K. S., & Lee, K. H. (2006). A Study on Designing Mathematising Teaching Units for the Inquiry into Number Partition Models with Constant Differences. *School Mathematics, 8*(2), 161-176.
14. Kim, W., Cho, M., Kim. I., Yun, J., Heo, N. G., Kim, H., Kim, K., Park, H., Seo, B., Ahn, S., & Lee, D. (2025). *High school Algebra.* Visuang.
15. Kim, W., Cho, M., Pang, K., Yun, J., Shin, J., Yim, S., Kim, D., Kang, S., Kim, K., Park, H., Sim, J., Oh, H., Lee, D., Lee, S., & Cheong, J. (2018). *High school Mathematics.* Visang.
16. Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas numbers with applications.* A Wiley-Interscience Publication.
17. Kwag, H. (2017). Development of 'Music Making Activities' Teaching Materials for Elementary School Music Curriculum using Golden section and Fibonacci Sequence. *Journal of Music Education Science, 32*, 151-166.
18. Miles, E. P. (1960). Generalized Fibonacci Numbers and Associated Matrices. *Amer. Math. Monthly, 67*(8), 745-752. https://doi.org/10.1080/00029890.1960.11989593

19. Miller, C. B., & Veenstra, T. B. (2002). Fibonacci: Beautiful Patterns, Beautiful Mathematics. *Mathematics Teaching in the Middle School, 7*(5), 298-305. https://doi.org/10.5951/MTMS.7.5.0298
20. Ministry of Education (2022). *Mathematics Curriculum.* Ministry of Education Notics, No. 2022-33.
21. Newton, L. D. (1987). Fibonacci and Nature: Mathematics Investigations for Schools. *Mathematics in School, 16*(5), 2-8.
22. Noh, J., & Kim, Y. (2018). A recurrence formula for the Fibonacci sequence generated from rabbits with a finite lifespan. *Journal of Science Education for the Gifted*, 10(1), 55-61. https://doi.org/10.29306/jseg.2018.10.1.55
23. Son, H. C. (2010). A Study on Teaching Materical for Enhancing Mathematical Reasoning and Connections – Figure numbers, Pascal's triangle, Fibonacci sequence -. *School Mathematics, 12*(4), 619-638.
24. Włoch, A. (2013). Some identities for the generalized Fibonacci numbers and the generalized Lucas number. *Discrete Appl. Math., 219*, 5564-5568. https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.11.030
25. Yang, J., & Zhang, Z. (2018). Some identities of the generalized Fibonacci and Lucas sequence. *Appl. Math. Comput., 339*, 451-458. https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.07.054
26. Yang, Y. (2000). A Study on the Fibonacci Sequence. *The Korean journal for history of mathematics, 13*(1), 63-76.
27. Yang, Y., Kim,, T. (2008). A Study on the Generalized Fibonacci Sequence. *The Korean journal for history of mathematics, 21*(4), 87-104.

[a]Nam Gu Heo, Professor: Department of Mathematics Education, Sunchon National University
Email address: ngheo@scnu.ac.kr