J. Korean Soc. Math. Edu. Ser. B: Theoretical Math. Pedagogical Math.
https://doi.org/10.7468/jksmeb.2025.32.2.87 ISSN(Print) 3059-0604
Volume 32, Number 2 (May 2025), Pages 87–111 ISSN(Online) 3059-1309

배치형 중복조합 문제에 대한 연역적 문제만들기
DEDUCTIVE PROBLEM MAKING FOR A DISTRIBUTION TYPE PROBLEM ON COMBINATION WITH REPETITION

허은숙 [a]

Abstract. Problem-making has been continuously studied in mathematics education and problem-solving. In particular, the deductive problem-making method has potential applicability to various mathematical topics. By analyzing the problem-solving process into several substructures and creating problems backward by altering elements within those substructures, this method becomes meaningfully relevant to the reflection phase of problem-solving. This study utilizes the deductive problem-making method for a problem on combination with repetition and examines several pedagogical characteristics.

1. 서론

수학 문제해결을 주제로 연구된 국내 논문에서 문제해결 과정의 분석, 문제해결 전략 및 방법에 대한 논의 이상으로 많이 다루어진 분야는 문제만들기에 대한 주제이다. What-if-not 방법을 소개하고 구체화하여 교수학적 의미를 고찰하는 연구들이 수행되었고, 학생들의 문제만들기 활동을 통해 학업성취도, 학습태도, 창의성, 문제해결력과의 관계에 주목한 후속 연구들이 이어졌다([12]). 수학과 교육과정에서도 문제만들기에 대한 강조가 이어져 왔으며, 2022 개정 수학과 교육과정에서는 '문제해결 과정 및 결과의 의미를 재해석하여 주어진 문제를 변형하거나 새로운 문제를 만들어 해결하게 한다'는 구체적 교수 학습 방법이 제시되었다([16]). 문제해결의 결과를 확장하고 활용할 수 있는 자연스러운 연결 활동으로서 문제만들기를 적극 권고한 것이다.

문제만들기를 통해 변형된 문제나 새롭게 구성된 문제는 그 자체로 논리적인 해결이 가능해야 하고, 원래의 문제와 의미있게 연결될 때 교수학습 과정에서 보다 실제적인 활용성을 가질 수 있다. 이러한 관점에서 Han([5])은 원래문제의 풀이과정을 구조화하고 각 하위구조의 세부적인 구성요소의 변형을 통해 역으로 문제의 조건을 생성하는

Received by the editors April 12, 2025. Accepted May 1, 2025.
2020 *Mathematics Subject Classification.* 97D40, 97K20.
Key words and phrases. Deductive problem making, problem on combination with repetition, structure of problem solving process, substructures
주요어: 연역적 문제만들기, 중복조합 문제, 문제풀이구조, 하위구조

연역적 문제만들기 방법을 제시하였다. 이렇게 생성된 문제는 원래문제와 유사한 풀이 구조를 갖게 되며 논리적인 해법이 보장된다. 특히 문제의 해결과정을 분석하고 결과를 거꾸로 탐색하는 과정을 통해 문제의 조건을 재해석하는 과정은 교육과정에서 제시한 반성적 문제해결학습의 연장선 관점에서 문제만들기의 구체적인 방법을 제시하는 의미를 갖는다.

연역적 문제만들기는 기준이 되는 특정 문제를 출발점으로 하여 진행되기 때문에 해당 문제의 개념적 특징 및 풀이 과정의 방향이 생성된 문제 결과에 영향을 미친다. 어떤 풀이를 선택하고, 어떤 기준으로 그 풀이과정을 분석하는지에 따라 조건의 가변범위가 달라지므로 문제 생성 결과가 달라질 수 있는 것이다. 따라서 연역적 문제만들기의 전제 조건으로 해당 주제의 핵심 개념은 무엇인지, 이를 내포하고 있는 문제로서 원래문제가 적절한지, 그리고 단계별 하위구조가 명확한 풀이 구조를 갖는지 등을 탐색할 필요가 있다.

연역적 문제만들기 방법은 무리방정식 문제를 시작으로 로그부등식, 로그방정식 문제를 통해 체계화되었고 삼각형 작도 문제로의 적용을 통해 기하학적인 문제에 대해서도 조건을 일반화하여 문제를 생성할 수 있는 활용성을 보였다([5],[6],[7]). 보다 다양한 주제 영역에 대해 연역적 문제만들기의 방법을 적용해보는 것은 문제만들기의 방법으로서 확장 가능성을 탐색하고 구체적인 교수학적 방향을 모색하는 데 디딤돌이 될 수 있을 것이다. 순열과 조합을 포함한 경우의 수 문제는 대부분 비정형적인 문장제로 제시되고, 방정식과 같은 절차적 도구보다는 필요한 세기 방법을 떠올려 적용해야 해결되는 경우가 많다. 특히 문제 조건 중 수 조건이 표면적으로 드러나기 때문에, 수 조건의 단순 변형으로 인해 엉뚱한 풀이를 갖거나 의도치 않은 개념을 요구하는, 혹은 답이 지나치게 복잡해지는 문제를 만들기 쉽다.

본 연구는 경우의 수 문제 중 중복조합 문제에 대해, 연역적 문제만들기 방법을 적용해 올바른 답이 보장되고 원래문제와 유사한 풀이 구조를 갖는 새로운 문제를 만드는 과정과 결과를 구체적으로 제시하고자 한다. 중복조합은 경우의 수 개념 중 가장 나중에 제시되어 선수 개념을 폭넓게 활용할 수 있으나 독특한 세기 개념으로 인해 교수학습 과정에서 어려움이 드러나는 주제이다([10]). 연역적 문제만들기 과정을 통해, 중복조합 문제의 풀이 구조를 깊이 분석하고 문제 조건과의 관련성을 밀접하게 파악함으로써 수 조건의 변형과 일반화 가능성을 찾고 새로운 문제 조건을 생성하는 성과를 기대할 수 있다. 특히 배치형 진술의 문제를 통해 '분할과 대응'이라는 중복조합의 통합적인 세기 개념을 분석하고 이를 바탕으로 풀이 과정의 단계를 조직함으로써 보다 내면적인 유사성을 갖는 문제 생성을 시도해볼 수 있다.

2. 연구의 배경

2.1. 연역적 문제만들기

연역적 문제만들기는 Han([5])의 연구에서 제기된 방법으로 원래문제[1])의 풀이에 기반해 문제해결과정을 역으로 분석하여 새로운 문제를 만드는 방법을 말한다. '연역적' 이라는 단어는 추측과 증명에 의한 수학적 탐구 양식을 설명하면서 Lakatos가 제시한 연역적 추측(deductive guessing)에서 차용되었다. 연역적 추측은 소박한 추측(naive guessing)에 대비되는 것으로 증명이 추측에 선행하며 증명에 근거하여 추측을 만들게 되는 방식이다. 같은 맥락에서 연역적 문제만들기는 풀이가 문제에 선행하는 문제만들기를 의미한다. 문제를 먼저 만든 후 풀이를 분석하는 것이 아니라, 원래문제의 풀이를 먼저 구성하고 그 풀이에 근거하여 새로운 문제를 만들게 된다([7]).

연역적 문제만들기에서는 원래문제와 그 풀이 과정까지를 모두 하나의 구조로 본다. Han([4])은 문제에서 주어진 것과 구하는 것, 해결 과정에서 얻어진 성질 등을 모두 풀이 과정의 요소로 보고, 이 요소들 사이의 논리적 관계를 수학문제의 내적 구조로 제시하였다. 이때 문제의 조건들도 풀이 과정의 요소가 되므로, 문제와 풀이 과정 전체를 연결된 하나의 구조로 해석하는 관점은 수학 문제를 하나의 대상으로 깊이 있게 파악하려는 시도로 볼 수 있다. 본 연구에서는 문제의 내적 구조의 의미를 토대로 하는 풀이의 흐름 전체를 '풀이 구조'로 표현할 것이다. 이러한 관점에서 풀이 구조를 이루는 풀이 과정의 각 단계는 '하위구조'로 명명할 수 있다([7]). 풀이 과정을 단순히 부분으로 나누는 것을 넘어서서, 하위구조는 부분 단계들의 논리적인 관계를 드러내야 한다. 어떤 하위구조의 변화는 논리적인 관계를 맺는 다른 하위구조의 변화를 유도하게 되고, 이러한 연결관계를 통해 결국 문제 조건의 변형을 유도하여 새로운 문제를 생성하게 된다. 이는 Park([17])이 제시한 관계적 구조의 관점으로도 해석할 수 있다. 새로운 문제를 만들 때 원래문제가 가진 대상들 사이의 관계를 파악하고, 조건의 추가나 제거와 같은 변화에 대해서도 원래문제의 관계적 구조를 보장하는 것은 문제 생성에 중요한 요소가 된다([17]). 구조적인 관점을 통해 만들어진 문제들은 원래문제와 유사도가 높은 풀이 구조를 가지므로 서로 관련된 체계적인 문제 집합을 구성하게 된다. 또한 답이 나오기 위한 하위구조의 관계를 거꾸로 유추하여 바뀐 조건이나 새로운 조건을 만들기 때문에 연역적 문제만들기로 생성된 문제는 반드시 옳은 답과 옳은 해결 방법을 보장받는다.

---

[1]) [5]에서는 '출발점 문제'를 '원래문제'라 부르고 이후 관련 연구에서도 같은 용어를 사용하였다. 본 연구는 앞서 생성된 문제를 다시 출발점으로 하여 다른 문제를 생성하는 일반화 과정을 포함하므로, 출발점의 의미가 가장 처음의 문제에 국한되지 않는다. 따라서 본 연구에서도 문제만들기의 기반이 되는 가장 처음의 문제를 '원래문제'로 표현하였다.

Han et al.([7])의 연구에서는 연역적 문제만들기의 과정을 ①문제해결의 구조 분석, ②문제해결의 하위구조 탐구, ③연역적 문제구성(Deductive Problem Construction, DPC)의 3단계로 체계화하였다.

첫 번째, 문제해결의 구조 분석 단계는 원래문제의 문제해결 과정 전체를 하나의 구조로 생각하여, 논리적 흐름에 따른 풀이의 각 단계를 하위구조로 분석하는 과정이다. 두 번째, 문제해결의 하위구조 탐구 단계는 각 하위구조에 대해 식, 양, 관계 등에 대해 가변 또는 불변의 요인을 확인하고 이들의 변형 가능성을 탐구하는 과정이다. 이때 한 하위구조에서의 변형 요인이 다른 하위구조의 변형을 유도하거나 여러 요인이 유기적으로 서로 영향을 미치고 있음을 파악하게 된다. 하위구조 탐구 단계에서 분석된 가변 요소와 연결 관계는 다음 단계인 연역적 문제구성에 대한 실제적인 아이디어를 제공한다. 세 번째, 연역적 문제구성 단계(DPC)에서는 그림 1과 같은 방향으로 분석된 하위구조 중에서 하나를 선택하여 변형 요인을 실제로 변화시키게 된다. 이 변화가 가능하기 위해 이전 하위구조가 갖추었어야 할 조건을 역으로 거슬러 올라가면서 관련된 식이나 양 등의 또 다른 요인을 변화시킨다. 거꾸로 하위구조를 거슬러 올라가다 보면 결국 원래문제의 변형에 이르게 되고 새로운 문제가 생성되는 과정이다. 연역적 문제구성은 한 단계로 간단히 생성되기도 하고, 여러 하위구조의 변화가 서로 맞물려 여러 단계를 거쳐 이루어질 수도 있다. 그러나 그림 1과 달리, 원래문제에는 다양한 풀이가 존재할 수 있고 기준이 되는 풀이 구조의 특징에 따라 하위구조의 변형 관계가 순차적이지 않을 수 있다. 예를 들어 하위구조 2의 변형만으로 곧바로 새로운 문제가 만들어질 수도 있다. 원래문제의 특징과 기준 풀이 구조 및 하위구조의 추출과 분석 내용 등에 따라 다양하고 창의적인 문제구성의 결과를 얻을 수 있다.

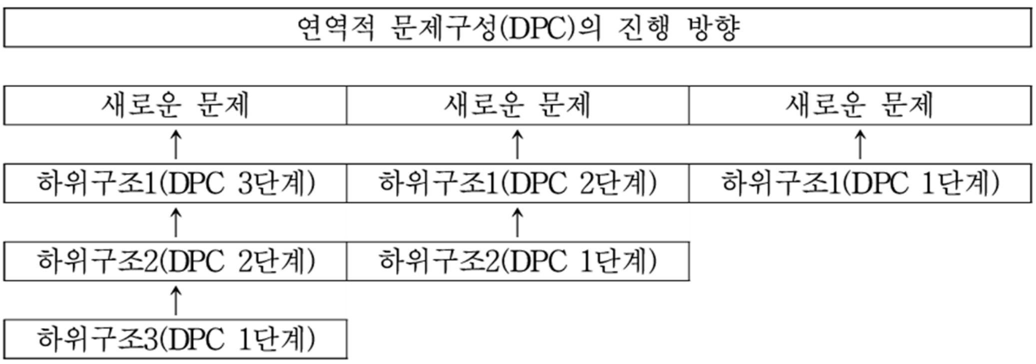

그림 1. 연역적 문제구성(DPC)의 단계([6], p.612)

문제를 풀이 과정과 연결된 하나의 구조로 생각하는 관점은 문제를 고정된 것으로 보지 않고 문제의 변화와 확장을 가능하게 한다. 문제와 풀이 과정의 연결 관계, 풀이

과정에서 하위구조들의 연결 관계, 하위구조들의 변화와 문제의 생성 관계 등을 유기적으로 분석하는 활동은 문제를 구조적으로 바라보는 사고를 유도한다. 이렇게 문제의 논리적 관계 구조를 파악하는 것은 문항들 사이의 일반화를 이끌어내는 데 필수적인 과정이 되며([11]). 하위구조의 관계 분석을 토대로 생성된 문제들은 원래 문제와 유사한 구조를 가지고 서로 높은 연결성을 갖게 된다.

풀이구조가 절차적이고 단계적인 방정식 문제에 대한 연역적 문제만들기([5])가 처음 시도된 이후, 로그부등식에 대한 풀이 구조 분석을 통해 연역적 문제 생성에 대한 체계성이 보완되었다([7]). 특히 연역적으로 생성된 문제 결과를 재분석하여 변수 관계의 가변성을 찾아 또 다른 문제를 생성해 내는 확장을 보였다. 또한 대칭형의 로그방정식 문제에 대한 치환 구조 분석을 통해 외형상 전혀 다른 지수방정식, 무리방정식 및 삼각방정식 등을 만들었으나 이들은 모두 원래문제와 같은 치환구조로 본질적인 연결성을 갖는 문제들이 된다. 연역적 문제만들기를 도형의 영역으로 확장한 연구([6])에서는 각이나 선분과 같은 기하학적인 조건의 변형을 통해 다양한 삼각형의 작도문제를 생성하였다. 닮음인 두 삼각형에서 높이 비, 각의 이등분선의 비와 같은 대수적인 요소를 활용해, 도형 문제에서도 조건을 일반화하고 확장할 수 있는 유용성을 제시하였다.

연역적 문제만들기 방법은 학교수학의 다양한 주제 영역에 적용할 수 있으며, 그 과정과 결과의 탐구를 통해 문제만들기 방법으로서 확장된 일반성을 가질 수 있을 것이다. 특히 경우의 수 문제는 수 조건들의 관계와 핵심 개념을 파악하면 다른 계산 과정을 추가하지 않고 풀이 구조를 구성할 수 있으므로 구조적인 관점에서 접근하기 좋은 문제 상황이 된다. 그러나 실제 경우의 수 문제를 만들 때 조건의 추가를 통해 계산을 더 복잡하게 하거나 같은 세기 개념을 반복 사용해 어렵게 만든 문제를 좋은 문제로 판단하는 경향을 보이거나([19]), 개념의 필수 조건을 명확히 제시하지 않아 의도한 세기 개념을 벗어나게 되는 오류를 보이기도 한다([1]). 다양한 수 조건의 변화에도 논리적인 답을 구할 수 있고 핵심 풀이 구조를 유지하는 경우의 수 문제를 만드는 방법으로 연역적 문제만들기를 적극적으로 활용해볼 수 있을 것이다.

2.2. 중복조합 문제의 특징

문장제 형태로 제시되는 순열조합 문제에 대해 Lee([14])는 진술 유형을 중심으로 선택형, 배치(분배, 배열)형, 분할형으로 분류하고 그 차이를 탐구하였다. 서술어의 의미에 따라 분류된 유형의 차이는 문제해결 과정에 영향을 주며, 특히 개념의 정의 진술과 다른 유형의 문제가 제시될 때 이해의 어려움이 가중된다. Lee([15]), Choi([3]), Hong([9]) 등은 진술 유형 간 구조적 동형 관계를 유도하여 문제해결을 돕고자 하였고 그 방법으로 Roberts([18])의 점거문제를 적극 도입하였다. 융합적인 문제해결력을 키우는 데 구조적 동형을 파악하는 것은 유용한 방법이 될 수 있다. 그러나 문제의 의미구조를 서로 변환하여 이해하는 데에는 복잡한 인지 처리 과정을 내포하며([2]), 교육과정에서

다루지 않는 점거문제 자체를 동형의 매개로 새롭게 이해해야 하는 학습 부담을 고려할 필요가 있다.

중복조합의 평가문제는 다양한 진술 유형을 포함해 활발하게 제시되고 있다. ‘3명의 학생 중에서 중복을 허용하여 5명을 선택하는 방법의 수’를 구하는 선택형 문제와 ‘같은 종류의 연필 5자루를 3명에게 남김없이 나누어주는 방법의 수’를 구하는 배치형 문제는 모두 ${}_3\mathrm{H}_5$를 답으로 갖는 중복조합 문제이다. 이에 덧붙여, 중복조합 문제는 방정식 유형으로도 제시되는데, ‘방정식 $x+y+z=5$의 음이 아닌 정수해 (x,y,z)의 개수’를 구하는 형태를 말한다. 이 유형은 ‘선택’이나 ‘배치(나누어주는)’ 같은 행위적 의미로 서술되는 문장제는 아니나, 다른 경우의 수 주제와는 달리 중복조합의 개념에만 존재하는 대수적 표현의 진술이다.

다양한 형태의 진술 유형이 골고루 평가문제로 제시되는 것에 비해, 교수 학습 과정에서 중복조합의 개념을 설명하고 풀이 구조를 이끌어가는 진술은 선택형에 치우쳐있다. 중복조합의 정의 진술이 선택형이므로 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 선택하는 상황은 바로 중복조합의 수 ${}_n\mathrm{H}_r$ 에 대응하여 해결하나, 다른 진술 유형의 문제는 유형문제 혹은 연습문제의 형태로 다루어진다. 배치형과 방정식 문제에 대한 이해는 선택형 진술로의 강제적 대응으로 설명되며, 그 자체로 ${}_n\mathrm{H}_r$의 개념을 구조적으로 연결하지 못한다. 같은 종류의 연필 5자루를 3명에게 남김없이 나누어주는 방법에 대한 배치형 문제는 3명 중에서 연필을 받을 5명을 중복을 허용해 선택하는 것과 같다는 재진술로 대치되어 설명되고 있는 식이다.

여러 선행연구에서 논의된 Roberts([18])의 점거문제는 공과 상자의 구별 여부 및 빈 상자의 허용 여부에 따라 ‘공을 상자에 넣는 방법’을 총 8가지의 상황으로 나타낸 것으로 모두 배치형의 진술 구조를 따른다. Huh([10])는 점거문제 전체를 설명할 수 있는 일관된 아이디어를 분석하여 배치형 진술에서 드러나는 중복조합의 세기 개념을 강조하였다. 8가지 점거문제를 상자의 구별 여부를 기준으로 분류하면, 다른 상자에 공을 넣은 결과는 같은 상자에 공을 넣은 결과에 상자의 구별을 순서대로 대응시킨 것으로 설명할 수 있다. 또한 같은 상자에 공을 넣는 방법은 공의 개수 분할 결과와 일치하므로, 결국 공을 다른 상자에 넣는 방법은 ‘공의 개수 분할 $\rightarrow$ 순서 대응’의 과정으로 일반화할 수 있다. 이때 공의 개수 분할 과정을 자연수 분할로 한정하지 않고, 음이 아닌 정수 분할로 확장하면 공을 넣지 않는 상자로의 대응도 일대일 관계로 보존되고 계산과정에서 같은 것이 있는 순열을 적용하는 일관성을 획득할 수 있다. 이러한 ‘확장된 수분할’과 ‘순서 대응’의 개념으로 8가지의 점거문제는 통합적으로 설명될 수 있으며 공의 개수(r)와 상자의 개수(n)의 크기 관계에 상관없는 일반성이 보장된다([10]).

점거문제 분석을 통해 배치형 진술에서 분석한 중복조합의 세기 개념은 나머지 진술 유형과도 구조적인 연결 관계를 갖게 된다. 같은 종류의 대상(공) r개를 다른 대상(상자)의 수 n만큼 확장된 수분할 한 후 순서 대응시킨 결과는 r의 $n-$tuple($n-$짝)의 형태로

간단히 표현할 수 있다. 예를 들어 $r = 5$, $n = 3$이라면 합이 5인 음이 아닌 세 정수 x_1, x_2, x_3에 대해 (x_1, x_2, x_3)의 표현으로 분할과 대응 결과를 모두 나타낼 수 있다. 이는 방정식 $x_1 + x_2 + x_3 = 5$의 음이 아닌 정수 해를 구하는 문제와 곧바로 연결된다. 또한 해 중에서 $(2, 0, 3)$을 생각하면, 같은 공 2개, 0개, 3개가 순서대로 다른 상자에 들어간 결과는, 각 상자의 구별을 아래 첨자 $i(= 1, 2, 3)$으로 구분하고 상자에 들어간 공을 a_i로 표현하면 $a_1a_1a_3a_3a_3$의 선택 결과와 대응시킬 수 있다. 이는 서로 다른 3개의 대상 a_1, a_2, a_3 중에서 중복을 허용하여 5개를 선택한 결과 중 하나에 해당된다. 서로 다른 세 종류의 필기구에서 중복을 허용해 5개를 선택하는 방법의 수를 구하는 문제와 바로 연결되는 것이다. 확장된 수분할과 순서 대응 결과는 '중복을 허용해 선택된 개수'와 '선택된 대상'을 나타내게 되므로 선택형 진술과도 자연스러운 연결 관계를 획득할 수 있다.

따라서 같은 종류의 공을 다른 상자에 나누어 넣는 행위적 의미로 인해 중복조합의 배치형 문제는 확장된 수분할과 순서 대응의 개념을 가장 자연스럽게 내포하는 진술 유형으로 제시할 수 있으며, 분할과 대응의 세기 개념은 방정식과 선택형 문제의 진술 구조와도 자연스러운 연결 관계를 갖는다. 이때 내포된 분할, 대응 개념으로 상호 관계가 연결되므로 세 진술 구조는 형태적인 대응 관계에 얽매이지 않고 각각의 개별성을 유지하게 된다. 이러한 관점에서 표 1에 제시된 기본 조건을 만족하는 세 문제는 모두 중복조합의 수 ${}_n\mathrm{H}_r$와 곧바로 대응되는 바탕문제[2)]로 설명될 수 있다.

표 1. 중복조합의 바탕문제([10], p.72)

	${}_n\mathrm{H}_r$의 구조를 갖는 유형별 바탕문제
선택형	서로 다른 n개 중에서 중복을 허용하여 r개를 선택하는 방법의 수
배치형	같은 종류의 r개를 서로 다른 n개에 남김없이 나누어주는 방법의 수 (못 받는 대상이 있을 수 있음)
방정식	방정식 $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = r$을 만족하는 음 아닌 정수 해 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$의 개수

바탕문제는 문제해결의 가장 기본이 되는 방법을 포함하고 있으며 다른 문제의 해결을 위한 본질적인 관계를 포함하는 문제이고([8]), 연산을 떠올리거나 연결할 수 있는 가장 쉬운 유형의 문제([13])를 의미한다. 즉 바탕문제는 핵심 개념과 원리를 포함하고 있으면서 관련 문제들을 해결하는 기본 구조를 가지는 것이다. 세 가지 문제의 기본 형태는 중복조합의 개념 구조와 연결되어 중복조합의 수 ${}_n\mathrm{H}_r$을 바로 적용할 수 있게

[2)]'바탕문제'는 진술 유형별로 중복조합의 구조 ${}_n\mathrm{H}_r$를 바로 대응시킬 수 있는 문제 형태를 의미하는 것이다. 본 연구에서 '바탕문제 구조'는 ${}_n\mathrm{H}_r$와 바로 대응되는 중복조합의 풀이 구조를 강조한 표현이다.

하여 다양한 평가문제를 해결하는 기준이 된다. 중복조합의 평가문제들은 이러한 바탕 문제 구조에 여러 대립조건이 부여되어 성장한 것으로 설명할 수 있다([10]). 중복조합 문제에서 가장 기본적인 대립조건은 개수 조건의 변화로 분할의 개수에 대해 최소, 최대 조건을 부여하거나 개수의 특징을 제한하는 경우를 말한다. 특히 배치형 진술 문제에서 두드러지는 대립조건은 '나누어 줄 대상'의 종류를 여러 개로 제시하는 것이다([10]). 다음에 제시하는 두 문제를 통해 배치형 문제에서 특징적인 대립조건을 어떻게 바탕문제 구조로 회귀하여 문제를 해결하는지 일반적인 해결 방법을 간단히 살펴볼 수 있다.

배치 1. 세 명의 학생 A, B, C에게 같은 종류의 사탕 6개와 같은 종류의 초콜릿 5개를 다음과 같이 남김없이 나누어주는 경우의 수를 구하여라. [2020학년도 대학수학능력시험 나형 29번]

(가) 학생 A가 받는 사탕의 개수는 1이상이다.
(나) 학생 B가 받는 초콜릿의 개수는 1이상이다.
(다) 학생 C가 받는 사탕의 개수와 초콜릿의 개수의 합은 1이상이다.

배치 2. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 검은색 모자 6개와 흰색 모자 6개를 다음과 같이 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하여라. (단, 같은 색 모자끼리는 서로 구별하지 않는다) [2021학년도 대학수학능력시험 가형 29번]

(가) 각 학생은 1개 이상의 모자를 받는다.
(나) 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수는 4개 이상이다.
(다) 흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받는 학생은 A를 포함하여 2명뿐이다.

배치 1번은 최소 개수 대립조건과 나누어줄 대상을 사탕과 초콜릿의 두 가지로 제시하는 대립조건이 설정된 문제이다. 학생 A에게는 사탕을, 학생 B에게는 초콜릿을 1개씩 먼저 나누어준 후 남은 사탕 5개와 초콜릿 4개를 세 명의 학생에게 나누어주는 경우의 수는 바탕문제 구조를 곱집합 형태로 갖는 ${}_3H_5 \times {}_3H_4$이 된다. (다)조건의 부정인 사탕 5개와 초콜릿 4개를 A와 B에게만 나누어주는 경우의 수인 ${}_2H_5 \times {}_2H_4$를 제외하여 답을 구할 수 있는 문제이다. 배치 2번도 개수에 대한 최소 조건과 나누어줄 대상을 두 가지로 제시한 문제이다. 특히 이 문제는 두 대상에 대한 나눌 개수의 크기 관계가 설정되어 있어 검은색 모자의 분할 개수를 먼저 기준으로 나누고, 그에 따라 배치할 흰색 모자의 개수를 바탕문제 구조로 결정하게 된다.

배치형 문제 중 위와 같이 나눌 대상을 여러 가지로 제시하는 중복조합 문제는 각각의 대상에 대해 바탕문제 구조를 적용해 곱집합으로 해결하거나, 대상의 개수 관계가 종속적인 연관성을 가질 때에는 기준 대상의 개수를 분할하여 접근하게 된다. 바탕문제 구조의 곱집합 형태가 전체 해집합을 구하는 것이라면, 분할 결과를 기준으로 하는 풀이 구조는 해집합의 구성요소를 관찰하여 중복조합의 경우를 개별적으로 파악하게

한다. 이러한 전체와 부분의 관점을 두루 적용할 수 있는 해결 구조의 문제를 분석하고 확장하는 경험은 중복조합의 세기 개념에 대한 이해를 풍부하게 도울 수 있을 것이다.

3. 연구 결과 및 결론

경우의 수 단원 중에서 중복조합은 이전에 학습한 개념만으로 직접 유도할 수 없고, 공과 칸막이 모델과 같은 새로운 상황을 도입해 설명하게 되므로 교수 학습 과정에서 다루기 어려운 개념임에도 다양한 진술 유형의 평가문제로 꾸준히 제시되고 있다[10]. 특히 배치형의 중복조합 문제는 '나눌 대상을 받을 대상에게 나누어주는' 관계로 진술되어, '하나의 대상에서 중복을 허용해 선택하는' 정의 진술과 표면적으로 다른 형태를 가진다. 그러나 2장에서 논의한 것과 같이 배치형 진술은 분할과 대응이라는 중복조합의 본질적인 세기 개념을 직접 설명할 수 있는 형태이며, 정의 진술과 마찬가지로 바탕문제 구조로서 중복조합의 수 ${}_n\mathrm{H}_r$를 적용해 표현할 수 있다. 특히 배치 1 문제와 배치 2 문제를 통해 제시한 곱집합 및 분할과 같은 풀이 구조는 배치형 진술의 중복조합 문제를 다루는 핵심 아이디어로 활용도가 높다. 본 장에서는 배치형 문제 중에서 나눌 대상이 복수로 제시되고 대상별 나눌 개수의 크기 관계가 추가로 설정된 문제를 원래문제로 선정하여 분석하고, 연역적 문제만들기를 적용하는 과정과 결과를 제시할 것이다.

3.1. 원래문제의 풀이과정 분석

다음 원래문제는 빵과 우유의 두 대상을 3명의 학생에게 나누어주는 경우의 수를 구하는 배치형 문제이다. 조건 (가), (나)가 없다면, 같은 종류의 빵 6개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 방법의 수 ${}_3\mathrm{H}_6$와 같은 종류의 우유 8개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 방법의 수 ${}_3\mathrm{H}_8$의 곱집합인 ${}_3\mathrm{H}_6 \times {}_3\mathrm{H}_8$의 답을 가질 것이다.

원래문제. 같은 종류의 빵 6개와 같은 종류의 우유 8개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 다음 조건을 만족시키도록 나누어 주는 경우의 수는?[3)]
(가) 각 학생에게 적어도 1개의 빵을 준다.
(나) 각 학생에게 나누어 주는 우유의 개수는 빵의 개수보다 크거나 같다.

그러나 빵과 우유의 개수에 대한 최소 조건과 관계 조건이 추가로 부여되어 대립조건의 역할을 하게 된다. 이를 분석하여 중복조합의 바탕문제 구조로 유도하여야 문제를 해결할 수 있다. 개수에 대해 최소 제한 조건이 부여된 배치형 진술 문제에서는 제한된 개수만큼 대상을 먼저 나누어주고 나면 바탕문제 구조로 연결할 수 있다. 조건(나)에 제시된 우유의 개수가 빵의 개수보다 크거나 같아야 하는 대립조건도 같은 맥락으로

3) 2025학년도 EBS 수능특강 확률과 통계 (p.17 예제 1번)

해석할 수 있다. 우유를 나누어 주는 개수는 빵을 나누어준 개수에 따라 결정되므로, 나누어준 빵의 개수만큼 우유를 먼저 나누어주면 남은 우유는 바탕문제 구조로 연결된다.

[원래문제의 풀이과정]

(1) 같은 종류의 빵을 3명의 학생에게 먼저 1개씩 나누어주는 방법은 한 가지이므로, 남은 3개의 빵을 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 방법은 중복조합의 수 ${}_3\mathrm{H}_{6-3} = {}_3\mathrm{H}_3 = 10$이다.

(2) 각 학생에게 나누어 준 빵의 개수만큼 우유를 먼저 나누어 주는 방법은 한 가지이므로, 남은 2개의 우유를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 방법은 중복조합의 수 ${}_3\mathrm{H}_2 = 6$이다.

(3) 빵과 우유를 나누어 주는 두 경우의 수를 곱하면 답은 ${}_3\mathrm{H}_3 \times {}_3\mathrm{H}_2 = 10 \times 6 = 60$이다.

원래문제와 같이 나눌 대상이 빵과 우유와 같이 복수로 주어진 문제의 경우의 수는 하나의 대상을 나누어 준 경우 각각에 대해 다시 두 번째 대상을 나누어 준 경우를 대응시킨 순서쌍인 곱집합의 수로 구할 수 있다. 이때 나눌 두 대상의 관계에 따라 경우의 수를 구성하는 해집합 전체를 답으로 볼 수도 있고, 해집합의 부분적인 요소만 답이 될 수도 있다. 원래문제는 조건(나)의 빵과 우유의 배치 개수 관계에 따라 해집합에 대한 세부적인 이해가 달라질 수 있는 가능성을 갖는다. 그 과정에서 중복조합 세기 개념의 본질인 개수 분할과 순서 대응을 직접적으로 활용하는 상황의 문제로 확장될 수 있다. 이와 함께 조건(가)와 같이 나눌 개수에 대한 범위 조건도 함께 적용되어 있으므로 배치형 진술로 표현된 중복조합 문제의 주요 대립조건을 해결하는 과정 전체를 구조적으로 분석해보기 좋은 문제이다.

3.2. 연역적 문제만들기

연역적 문제만들기는 '①문제해결의 구조 분석 → ②문제해결의 하위구조 탐구 → ③연역적 문제구성(Deductive Problem Construction, DPC)'의 단계에 따라 체계적으로 접근할 수 있다. 3.1절에 제시한 [풀이과정]을 토대로 원래문제와 풀이과정 전체를 ①문제해결 구조로 분석하여 하위구조로 나누면 다음과 같다.

하위구조 1. 조건(가)에 따라 3명의 학생에게 먼저 1개씩 빵을 나누어준다. 남은 3개의 빵을 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 방법의 수는 바탕문제의 구조를 만족하므로 중복조합의 수 ${}_3\mathrm{H}_{6-3} = 10$과 같다.

하위구조 2. 조건(나)에 따라 각 학생에게 나누어 주는 우유의 최소 개수가 빵의 개수가 되어야 한다. 따라서 하위구조 1에서 각 학생에게 나누어 준 빵의 개수와 똑같은 수만큼의 우유를 먼저 나누어 주면 된다. 이 방법의 수는 한 가지이다.

하위구조 3. 하위구조 2에서 우유의 최소 개수의 배치가 해결되었으므로 남은 우유를 나누어 주는 방법에는 제한이 없고, 남은 우유를 못 받는 학생이 있더라도 조건(나)를 여전히 만족하게 된다. 즉 남은 2개의 우유를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 방법의 수는 바탕문제의 구조를 만족하므로 중복조합의 수 ${}_3\mathrm{H}_2 = 6$과 같다.

하위구조 4. 하위구조 1에서 빵을 나누어 준 각각의 경우에 대해 하위구조 3에서 남은 우유를 나누어 준 경우를 대응시킬 수 있으므로, 곱의 법칙에 따라 답 ${}_3\mathrm{H}_3 \times {}_3\mathrm{H}_2 = 10 \times 6 = 60$을 구할 수 있다.

원래문제의 풀이과정은 빵 나누어주기(1), 우유 나누어주기(2), 곱하여 답 구하기(3)의 3단계로 제시하였으나, 풀이 구조에서 각 요소의 역할을 분석하여 총 4단계의 하위구조 1, 2, 3, 4를 제시하였다. 풀이과정의 (2)단계를 우유의 최소 개수를 나누어 주는 과정인 하위구조 2와 남은 우유를 바탕문제의 구조로 나누어 주는 과정인 하위구조 3으로 세분화하였다. 이는 하위구조 3에서 바탕문제 구조 ${}_n\mathrm{H}_r$를 적용할 수 있도록 매개하는 하위구조 2의 역할을 중요하게 드러내기 위한 것이다. 전체 풀이 구조를 이루는 논리적인 관계까지 부분 단계로 분석한 것이 하위구조이기 때문이다. 이제 각 하위구조의 핵심 아이디어를 토대로 변화 가능한 요소와 불변의 관계를 찾기 위해 ②문제해결의 하위구조를 탐구해보자.

하위구조 1에서는 빵의 개수 및 조건(가)와 연결된 빵의 최소 개수가 제시된다. 모든 학생이 받을 빵의 최소 개수가 1이상이라면 빵의 개수는 학생 수 이상이 되어야 한다. 빵의 최소 제한 개수는 변할 수 있으며 이는 학생 수와 연동해 전체 빵의 개수에 영향을 준다. 최소 개수만큼 먼저 빵을 나누어주고 남은 빵을 나누어 줄 때에는 바탕문제의 구조 ${}_{\text{학생수}}\mathrm{H}_{\text{남은 빵 개수}}$를 사용하며, 남은 빵의 개수와 학생 수 사이에는 제한이 없다.

하위구조 2는 조건(나)와 연결되어 먼저 나누어 줄 우유의 최소 개수를 결정한다. 원래문제에서 조건(나)인 '우유의 개수 $\geq$ 빵의 개수'의 관계를 만족하려면 나누어줄 우유의 최소 개수는 각 학생이 받은 빵의 개수와 같아야 한다. 따라서 하위구조 2에서 이미 받은 빵의 개수만큼 우유를 먼저 나누어주는 방법은 한 가지이고, 그 결과 우유의 최소 개수 조건이 보장되기 때문에 하위구조 3에서는 남은 우유를 나누어주는 방법에 바탕문제 구조 ${}_n\mathrm{H}_r$를 사용할 수 있다. 즉 하위구조 2는 조건(나)의 대립조건을 바탕문제의 구조로 회귀시킬 수 있도록 유도하는 중요한 구조적 역할을 한다. 따라서 하위구조 2에서 우유의 최소 개수를 나누어주는 구체적인 방법은 변할 수 있으나, 하위구조 3의 바탕문제 구조를 보존하는 관계는 유지되어야 한다.

하위구조 3에서 남은 우유를 나누어주는 방법은 바탕문제의 구조 ${}_{\text{학생수}}\mathrm{H}_{\text{남은 우유 개수}}$로 구할 수 있다. 남은 우유의 개수는 학생 수와 직접 관련되어 있지 않다.

하위구조 4는 하위구조 1과 하위구조 3의 결과를 각각 대응시켜 모든 경우를 대응시킨 곱집합 ${}_{\text{학생수}}\mathrm{H}_{\text{남은 빵 개수}} \times {}_{\text{학생수}}\mathrm{H}_{\text{남은 우유 개수}}$을 답의 구조를 가진다. 이 곱집합

형태는 원래문제의 풀이 구조를 결과적으로 함축하는 뼈대로 볼 수 있다. 학생 수, 남은 빵의 개수, 남은 우유의 개수에 대해서는 개수 변형을 시도할 수 있으나 그에 따라 전체 빵의 개수와 전체 우유의 개수가 맞물려 변형되는 관계와 대립조건 (가), (나)와 연결되는 관계는 보존되어야 한다.

이제 하위구조의 역할 및 관계 분석을 토대로 ③연역적 문제의 구성(DPC)을 시도할 수 있다. 연역적 문제구성의 시작과 순서는 고정되어 있지 않으므로, 먼저 수 조건인 개수에 대한 변형 가능성을 시작으로 문제를 만들어보자.

하위구조 4의 답의 구조 ${}_3\mathrm{H}_3 \times {}_3\mathrm{H}_2$를 ${}_3\mathrm{H}_3 \times {}_3\mathrm{H}_m$으로 변형해보자(DPC 1). 이 결과가 나오려면 하위구조 3의 답이 ${}_3\mathrm{H}_m$이어야 하고, 남은 우유의 개수가 m이어야 한다(DPC 2). 남은 우유는 전체 우유를 빵의 개수만큼 나누어 주고 남은 결과이므로, 전체 우유의 개수는 빵의 개수를 더한 $6 + m$으로 바뀌어야 한다(새로운 문제). 따라서 자연수 m에 대하여 답이 ${}_3\mathrm{H}_3 \times {}_3\mathrm{H}_m$인 문제 1을 만들 수 있다. 실제 m의 값을 지정하여 원하는 답이 나오는 빵과 우유의 개수 조건을 충분히 구할 수 있다. 예를 들어, 답이 ${}_3\mathrm{H}_3 \times {}_3\mathrm{H}_4$가 되려면 빵 6개, 우유 10개를, 답이 ${}_3\mathrm{H}_3 \times {}_3\mathrm{H}_8$이 되려면 빵 6개, 우유 14개를 제시하면 된다.

문제 1. 같은 종류의 빵 6개와 같은 종류의 우유 $6+m$개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 다음 조건을 만족시키도록 나누어 주는 경우의 수는?

(가) 각 학생에게 적어도 개의 빵을 준다.

(나) 각 학생에게 나누어 주는 우유의 개수는 빵의 개수보다 크거나 같다.

이제 문제 1의 하위구조 4인 ${}_3\mathrm{H}_3 \times {}_3\mathrm{H}_m$를 ${}_3\mathrm{H}_b \times {}_3\mathrm{H}_m$으로 변형해보자(DPC 1). 이를 위해 하위구조 1의 답이 ${}_3\mathrm{H}_b$로 바뀌어야 하므로 남은 빵의 개수가 b가 되어야 한다(DPC 2). 남은 빵은 조건(가)에서 전체 빵에서 먼저 3명의 학생에게 1개씩 총 3개를 주고 남은 것이므로, 전체 빵의 개수는 $b + 3$이 되고 우유의 개수도 $m + b + 3$으로 바뀌어야 한다(새로운 문제). 따라서 답이 ${}_3\mathrm{H}_b \times {}_3\mathrm{H}_m$인 새로운 문제 2를 만들 수 있다. 이 결과를 활용하면 답이 ${}_3\mathrm{H}_4 \times {}_3\mathrm{H}_5$이 되도록 하기 위해서는 빵 7개, 우유 12개를 제시하면 되므로 수 조건의 변형을 다양하고 수월하게 제시할 수 있다.

문제 2. 같은 종류의 빵 $b + 3$개와 같은 종류의 우유 $m + b + 3$개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 다음 조건을 만족시키도록 나누어 주는 경우의 수는?

(가) 각 학생에게 적어도 1개의 빵을 준다.

(나) 각 학생에게 나누어 주는 우유의 개수는 빵의 개수보다 크거나 같다.

문제 2를 다시 출발점으로 두고 DPC 1단계 후, 하위구조 1에서 조건(가)를 적용하여 빵의 최소 개수를 변경(DPC 2)할 수 있다. 빵의 최소 개수가 $c(\geq 1)$이면 3명에게 먼저 나누어 주는 빵의 개수는 $3c$가 되어야 하므로 전체 빵의 개수는 $b + 3c$로 바뀌고, 전체

우유의 개수도 $m+b+3c$로 변형되어야 한다(새로운 문제). 따라서 답은 ${}_3\mathrm{H}_b \times {}_3\mathrm{H}_m$로 같으나 빵과 우유의 개수 및 조건(가)를 변형한 새로운 문제 3을 만들 수 있다. 조건(가)의 개수 변화를 적용하여 적어도 2개의 빵을 나누어준다면, 답이 ${}_3\mathrm{H}_3 \times {}_3\mathrm{H}_3$인 문제는 빵 9개, 우유 12개의 수로 변경해 제시해야 한다.

문제 3. 같은 종류의 빵 $b+3c$개와 같은 종류의 우유 $m+b+3c$개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 다음 조건을 만족시키도록 나누어 주는 경우의 수는?
(가) 각 학생에게 적어도 c개의 빵을 준다.
(나) 각 학생에게 나누어 주는 우유의 개수는 빵의 개수보다 크거나 같다.

문제 1, 문제 2, 문제 3은 남은 우유의 개수 변형을 시작으로, 연결된 하위구조의 관계를 통해 빵의 개수와 빵의 최소 개수까지 변형하였다. 이번에는 문제 3의 결과인 하위구조 4의 답 ${}_3\mathrm{H}_b \times {}_3\mathrm{H}_m$를 ${}_n\mathrm{H}_b \times {}_n\mathrm{H}_m$로 변형해보자(DPC 1). 이는 하위구조 1과 하위구조 3의 바탕문제 구조가 각각 ${}_n\mathrm{H}_b$, ${}_n\mathrm{H}_m$으로 바뀌어야 하고 학생 수가 n이 되는 경우다(DPC 2). 이를 위해서는 하위구조 1에서 먼저 cn개의 빵을 나누어 주어야 하므로 전체 빵의 개수는 $b+cn$으로 바뀌어야 한다. 따라서 우유의 개수도 $m+b+cn$으로 변경되어야 한다(새로운 문제). 이를 통해 학생 수 n, 남은 빵의 개수 b, 남은 우유의 개수 m에 대해 답이 ${}_n\mathrm{H}_b \times {}_n\mathrm{H}_m$인 새로운 문제 4를 만들 수 있다. 실제 수 정보를 대입하면 답이 ${}_4\mathrm{H}_3 \times {}_4\mathrm{H}_5$이 되기 위해 빵 11개, 우유 16개를 4명의 학생에게 적어도 2개씩의 빵을 나누어주는 것과 같이 문제의 조건 변형을 손쉽게 할 수 있다.

문제 4. 같은 종류의 빵 $b+cn$개와 같은 종류의 우유 $m+b+cn$개를 n명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 다음 조건을 만족시키도록 나누어 주는 경우의 수는?
(가) 각 학생에게 적어도 c개의 빵을 준다.
(나) 각 학생에게 나누어 주는 우유의 개수는 빵의 개수보다 크거나 같다.

순차적으로 수 조건의 변형을 확장하여 문제 1, 문제 2, 문제 3과 최종적인 문제 4를 만들었으나, 한꺼번에 변수들의 관계를 모두 파악하여 곧바로 문제 4를 생성할 수도 있다. 수 조건의 관계가 명확한 문제이므로 수 조건의 관계를 일반화하여 표현할 수 있다. 문제 4는 원래문제에서 대립조건 (가)를 포함해 변형 가능한 모든 수 조건을 일반화하였다. 특히 답을 ${}_n\mathrm{H}_b \times {}_n\mathrm{H}_m$로 미리 결정하고 그 답이 나오기 위한 앞선 하위구조의 관계를 거꾸로 찾아가면서 최종적으로 문제의 수 조건을 변형하게 된다. 연역적 문제만들기를 체계적으로 적용한 과정으로 볼 수 있으며, 경우의 수 문제에서 수 조건을 변형하여 답의 구조를 보장하는 여러 문제를 생성할 수 있는 유용성을 보인다. 또한 ${}_n\mathrm{H}_b \times {}_n\mathrm{H}_m$의 계산 수준을 미리 조절할 수 있고 그에 따른 수 조건을 설정할 수 있으므로 적절한 계산 과정을 요구하는 동일한 구조의 문제를 생성할 수 있다.

문제 4는 원래문제와 풀이구조가 동일하며 수 조건만 일반화되었으므로 문제 4를 출발점으로 하여 다른 방향의 문제 만들기를 다시 시도해볼 수 있다. 하위구조의 분석 탐구에서, 하위구조 2는 우유의 최소 개수를 지정하면서 하위구조 3의 바탕문제 구조를 보장해야 한다. 하위구조 2에서 우유를 빵의 개수만큼 나누어주는 방법이 한 가지가 되도록 유지하면서 우유의 최소 개수를 다르게 변형해보는 것에서 DPC 1단계를 시작해보자.

하위구조 2를 각 학생에게 나누어 준 빵의 개수보다 1개씩 더 많은 우유를 나누어 주는 것으로 변경하자(DPC 1). 이 방법의 수는 한 가지이고 이를 가능하게 하려면 나누어준 우유의 개수가 빵의 개수보다 학생 수 n만큼 많아져야 한다. 이때 하위구조 3의 바탕문제 구조가 적용되면 우유의 개수는 빵의 개수보다 항상 많아지게 된다. 따라서 답의 구조가 ${}_n\mathrm{H}_b \times {}_n\mathrm{H}_m$로 유지되려면 문제 4의 우유 개수는 $(m+b+cn)+n = m+b+n(c+1)$로 바뀌어야 하고, 조건(나)를 '각 학생에게 나누어 주는 우유의 개수는 빵의 개수보다 1개 이상 크다.' 또는 '각 학생에게 나누어 주는 우유의 개수는 빵의 개수보다 크다'로 변형해야 한다(새로운 문제). 두 조건은 같은 의미이지만 하위구조 3의 바탕문제 구조와의 연결을 보다 쉽게 유도할 수 있는 조건은 '크거나 같다'의 의미를 더 직접적으로 표현하는 '1개 이상'일 것이다. 그러나 이어지는 문제에서 '2개 이상'의 표현을 사용할 수 있으므로 문제 5번은 '크다'를 선택하여 다양한 표현을 사용하도록 제시하고자 한다. 답이 ${}_n\mathrm{H}_b \times {}_n\mathrm{H}_m$인 문제 5번은 다음과 같다. 답이 ${}_3\mathrm{H}_3 \times {}_3\mathrm{H}_2$인 문제의 경우 3명의 학생에게 적어도 1개의 빵을 준다면 빵 6개와 우유 11개로, 적어도 2개의 빵을 준다면 빵 9개와 우유 14개로도 설정할 수 있어 수 조건을 다양하게 구체화할 수 있다.

문제 5. 같은 종류의 빵 $b + cn$개와 같은 종류의 우유 $m + b + n(c + 1)$개를 n명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 다음 조건을 만족시키도록 나누어 주는 경우의 수는?
(가) 각 학생에게 적어도 c개의 빵을 준다.
(나) 각 학생에게 나누어 주는 우유의 개수는 빵의 개수보다 크다.

같은 방법으로 문제 4의 하위구조 2에서, 먼저 나누어 줄 우유의 최소 개수를 '(각 학생에게 나누어 준 빵의 개수)+2'로 변경하여도 그 방법의 수는 한 가지이다(DPC 1). 이때 조건 (나)는 '각 학생에게 나누어 주는 우유의 개수와 빵의 개수의 차가 2이상이다' 등의 진술로 변경해야 하고, 전체 우유의 개수는 학생수의 2배만큼 더 필요하므로 $(m + b + cn) + 2n = m + b + n(c + 2)$개로 조정되어야 한다(새로운 문제). (나)조건을 변형하여 답이 ${}_n\mathrm{H}_b \times {}_n\mathrm{H}_m$가 되도록 만든 다음 문제를 문제 6이라 하자. 예를 들어 답이 ${}_2\mathrm{H}_4 \times {}_2\mathrm{H}_3$인 문제는 빵 8개와 우유 15개를 2명의 학생에게 적어도 2개의 빵을 나누어주는 수 조건으로 구체화할 수 있다.

문제 6. 같은 종류의 빵 $b+cn$개와 같은 종류의 우유 $m+b+n(c+2)$개를 n명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 다음 조건을 만족시키도록 나누어 주는 경우의 수는?
(가) 각 학생에게 적어도 c개의 빵을 준다.
(나) 각 학생에게 나누어 주는 우유의 개수는 빵의 개수보다 2이상 크다.

다시 문제 4를 출발점으로 하면, 하위구조 2에서 나누어줄 우유의 최소 조건으로 '각 학생에게 나누어 준 빵 개수의 2배만큼의 우유를 나누어 주는' 조건을 제시해도 그 방법의 수는 한가지이고(DPC 1), 하위구조 3의 바탕문제 구조를 유지하여 적용할 수 있다. 이를 위해 조건 (나)는 '각 학생에게 나누어 주는 우유의 개수는 빵의 개수의 2배 이상이다'와 같이 변형해야 하고, 전체 우유의 개수는 빵 개수 만큼이 더 필요하므로 $m+2(b+cn)$개가 되어야 한다(새로운 문제). 이 문제를 문제 7이라 하자. 예를 들어, 문제 7의 (나)조건에 대해 답이 ${}_5\mathrm{H}_3\times{}_5\mathrm{H}_4$인 문제는 빵 8개와 우유 20개를 5명의 학생에게 나누어주며 적어도 1개씩의 빵을 주는 수 조건으로 제시할 수 있다.

문제 7. 같은 종류의 빵 $b+cn$개와 같은 종류의 우유 $m+2(b+cn)$개를 n명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 다음 조건을 만족시키도록 나누어 주는 경우의 수는?
(가) 각 학생에게 적어도 c개의 빵을 준다.
(나) 각 학생에게 나누어 주는 우유의 개수는 빵의 개수의 2배 이상이다.

원래문제의 모든 수 조건들의 관계를 찾아 일반화한 문제 4를 출발점으로, 하위구조 2에서 우유의 최소 개수를 나누어주는 구체적인 방법을 변형하여 조건(나)에서 빵과 우유의 관계를 다르게 제시하여 새로운 문제 5, 6, 7을 생성하였다. 문제 5, 6, 7은 원래 문제의 모든 수 조건과 조건(가) 그리고 조건(나)를 모두 변형한 형태의 새로운 문제가 된다. 같은 방법으로 하위구조 2에서 우유의 최소 개수를 나누어 주는 방법이 한 가지가 되는 다른 아이디어를 찾아 적용하면 유사한 풀이 구조를 갖는 여러 문제를 추가로 생성할 수 있을 것이다. 단, 하위구조 3에서 남은 우유를 나누어주는 바탕문제 구조의 관계를 유지하는 범위 내에서 하위구조 2의 변형을 찾는 방법이 제한적일 수 있으므로 아이디어의 탐구가 필요하다.

문제 1에서 문제 7은 모두 하위구조 4의 답의 구조인 곱집합의 형태를 유지하는 범위 내에서 생성되었다. 이제 곱집합의 결과를 이루는 요소를 세분화하여 분석함으로써 변화 가능성을 추가로 찾을 수 있을지 생각해보자. 원래문제는 빵을 받은 개수에 따라 우유의 최소 개수가 결정된다. 따라서 각 학생이 받은 빵의 개수를 세부적으로 파악할 수 있다면 우유의 개수 관계를 다르게 설정할 수 있다. 이를 위해 분할과 대응의 관점으로 연역적 문제만들기의 1단계인 ①문제해결의 구조 분석을 다시 시행하여 다음과 같은 하위구조를 추출하였다. 연역적 문제만들기는 풀이를 기반으로 거꾸로 문제의 조건을

생성하는 방법이므로, 원래문제의 풀이 구조를 어떤 방향으로 분석하는지에 따라 하위구조의 설정이 달라지고, 하위구조의 가변성과 연결 관계도 다르게 분석될 수 있으므로 생성되는 문제의 결과가 달라질 수 있다.

하위구조 1. 같은 종류의 빵 6개를 적어도 1개씩 3명에게 나누어 주기 위해서 분할하는 방법은 '1,1,4', '1,2,3', '2,2,2'의 세 가지이다. 각 경우의 분할 수만큼의 빵을 학생 3명에게 나누어주는 방법의 수는 순열 대응을 적용한 $\frac{3!}{2!}+3!+\frac{3!}{3!}=3+6+1=10$가지가 된다.

하위구조 2. 우유의 최소 개수를 나누어주는 방법은 하위구조 1의 분할된 빵의 개수 분할 결과를 그대로 따른다.

하위구조 3. 남은 우유 2개를 3명에게 나누어 주기 위해 '0,0,2' 및 '0,1,1'로 분할을 하고, 이를 순열 대응시켜 $\frac{3!}{2!}\times 2=6$가지를 구할 수 있다. 남은 우유에 대해서는 수 조건의 제한 없이 음이 아닌 정수로의 모든 분할을 적용할 수 있으므로, 이 결과는 바탕문제 구조인 ${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$와 같다.

하위구조 4. 하위구조 1의 각 분할에 대해 하위구조 2와 하위구조 3의 결과에 각각 곱의 법칙을 적용해 구하고, 세 가지의 결과에 합의 법칙을 적용해 답 $3\times 1\times {}_3\mathrm{H}_2+6\times 1\times {}_3\mathrm{H}_2+1\times 1\times {}_3\mathrm{H}_2=10\times {}_3\mathrm{H}_2$을 구할 수 있다.

빵을 나누어주는 구조를 ${}_3\mathrm{H}_3$의 전체 구조로 보지 않고 부분이 드러나게 세분화함으로써, 분할의 각 경우에 대해 하위구조 1, 2, 3의 연결 관계가 직접적으로 드러나는 특징을 갖는다. 원래문제의 풀이 구조를 개수 분할의 관점에서 정리한 다음 표 2를 관찰하여 빵과 우유의 개수 관계에 대한 구체적인 변형 아이디어를 추출할 수 있다. 관찰을 토대로 한 ②문제해결의 하위구조 탐구내용을 ③연역적 문제 구성(DPC) 과정과 연결하여 기술하고자 한다.

표 2. 원래문제의 분할-대응 풀이 구조

하위구조1	하위구조2	하위구조3
빵 1개,1개,4개 $\rightarrow \frac{3!}{2!}=3$	우유 1개,1개,4개 $\rightarrow 1$	남은 우유 2개 $\rightarrow {}_3\mathrm{H}_2$
빵 1개,2개,3개 $\rightarrow 3!=6$	우유 1개,2개,3개 $\rightarrow 1$	남은 우유 2개 $\rightarrow {}_3\mathrm{H}_2$
빵 2개,2개,2개 $\rightarrow \frac{3!}{3!}=1$	우유 2개,2개,2개 $\rightarrow 1$	남은 우유 2개 $\rightarrow {}_3\mathrm{H}_2$

원래문제의 하위구조 4인 답의 구조를 분리하는 변형(DPC 1)을 유도하기 위해 하위구조 1의 빵의 개수 분할 결과를 분석해 보자. 먼저 빵의 분할 '1, 2, 3'인 경우만 풀이 구조로 가지도록 분리하려면(DPC 2) '빵을 모두 다른 개수로 나누어 준다'의 추가 조건이 필요하다(새로운 문제). 이를 문제 8이라 하면, 해당 분할의 경우에 대해 하위구조 1, 2, 3의 결과를 곱한 $3!\times 1\times {}_3\mathrm{H}_2=6\times 6=36$을 답으로 갖는다. 같은 맥락으로 문제

8과 반대의 분할 결과인 '$1, 1, 4$'와 '$2, 2, 2$'의 경우를 풀이 구조로 갖게 하려면(DPC 2) '같은 개수의 빵을 갖는 학생이 있다'와 같은 추가 조건이 필요하다(새로운 문제). 이를 문제 9라 하면, 원래문제를 전체 사건으로 볼 때 문제 8의 여사건을 구하는 것으로 해석할 수 있으므로 $10 \times {}_3\mathrm{H}_2 - 3! \times {}_3\mathrm{H}_2$이 답이 된다($\left(\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{3!}\right) \times {}_3\mathrm{H}_2$도 가능하다). 또 '$1, 2, 3$' 또는 '$2, 2, 2$'로 분할되는 결과를 풀이 구조로 갖는(DPC 2) 문제를 만들기 위해 '나누어 주는 빵의 개수에 대한 최대 제한 개수'에 대한 추가 조건이 필요하다(새로운 문제). 최대 제한 개수를 3으로 설정한 문제 10의 답은 각 하위구조의 답에 곱의 법칙을 적용한 $\left(3! + \frac{3!}{3!}\right) \times {}_3\mathrm{H}_2$이 된다.

문제 8. 같은 종류의 빵 6개와 같은 종류의 우유 8개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 다음 조건을 만족시키도록 나누어 주는 경우의 수는?
(가) 각 학생에게 1개 이상의 빵을 모두 다른 개수로 나누어 준다.
(나) 각 학생에게 나누어 주는 우유의 개수는 빵의 개수보다 크거나 같다.

문제 9. 같은 종류의 빵 6개와 같은 종류의 우유 8개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 다음 조건을 만족시키도록 나누어 주는 경우의 수는?
(가) 각 학생에게 1개 이상의 빵을 나누어주며, 같은 개수의 빵을 받는 학생이 있다.
(나) 각 학생에게 나누어 주는 우유의 개수는 빵의 개수보다 크거나 같다.

문제 10. 같은 종류의 빵 6개와 같은 종류의 우유 8개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 다음 조건을 만족시키도록 나누어 주는 경우의 수는?
(가) 각 학생에게 나누어주는 빵의 개수는 1개 이상 3개 이하이다.
(나) 각 학생에게 나누어 주는 우유의 개수는 빵의 개수보다 크거나 같다.

문제 8, 9, 10은 하위구조 4의 결과를 분리하는 데 영향을 주는 하위구조 1의 변형을 통해 원래문제에 추가 조건을 부여한 문제들이다. 빵의 개수에 대한 분할 방법을 결정하는 추가 조건이므로, 빵의 최소 개수를 지정한 조건(가)에 추가 내용을 덧붙여 새로운 문제를 구성하였다. 조건(나)는 유지되기 때문에 우유의 개수에 대해서는 분할의 구조를 고려하지 않아도 되므로, 빵의 개수에 대해 ${}_3\mathrm{H}_{6-3}$으로 다루던 전체 구조를 분할의 구조로 재해석해보는 시작 문제로 적절할 것이다. 즉 문제 8, 9, 10은 바탕문제 구조와 분할 구조의 아이디어를 연계할 수 있는 문제로 활용될 수 있다. 이제, 분할의 결과를 관찰하여 하위구조 2의 결과를 변형해보자.

하위구조 2는 조건(나)에 제시된 빵과 우유 개수의 연결 관계를 적용하는 과정에서 하위구조 3의 바탕문제 구조가 성립하는 범위 내에서 우유의 최소 개수를 나누어주는 과정이다. 표 2를 관찰하면, 각 학생이 하위구조 1과 하위구조 2에서 받은 빵과 우유 개수의 합은 모두 2 이상이므로 개수의 합에 대한 조건을 변형해볼 수 있다.

표 3은 빵에 대한 각 분할 결과에 대해 각 학생이 받는 '빵과 우유 개수의 합이 3 이상'이 되도록 하위구조 2에서 우유의 최소 개수를 변형(DPC 1)한 것이다. 그 결과 남은 우유의 개수도 달라지나, 남은 우유를 나누어주는 방법은 하위구조 3의 바탕문제 구조를 적용할 수 있다. 따라서 답은 $3 \times {}_3\mathrm{H}_4 + 6 \times {}_3\mathrm{H}_5 + 1 \times {}_3\mathrm{H}_5$이 된다. 이러한 풀이 구조와 답을 갖는 문제가 되려면 '각 학생이 받는 빵과 우유 개수의 합이 3이상'이라는 조건(새로운 문제)이 필요하므로 조건(나)를 변형해 문제 11을 만들 수 있다.

표 3. 문제 11의 풀이 구조

하위구조1	하위구조2	하위구조3
빵 1개,1개,4개 $\to \frac{3!}{2!} = 3$	우유 2개,2개,0개 $\to 1$	남은 우유 4개 $\to {}_3\mathrm{H}_4$
빵 1개,2개,3개 $\to 3! = 6$	우유 2개,1개,0개 $\to 1$	남은 우유 5개 $\to {}_3\mathrm{H}_5$
빵 2개,2개,2개 $\to \frac{3!}{3!} = 1$	우유 1개,1개,1개 $\to 1$	남은 우유 5개 $\to {}_3\mathrm{H}_5$

문제 11. 같은 종류의 빵 6개와 같은 종류의 우유 8개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 다음 조건을 만족시키도록 나누어 주는 경우의 수는?
(가) 각 학생에게 적어도 1개의 빵을 나누어 준다.
(나) 각 학생에게 나누어 주는 빵과 우유의 개수의 합은 3이상이다.

문제 12는 문제 11을 바탕으로 우유의 개수에도 적어도 1개의 최소 개수 제한을 부여하였다. 이는 문제 11의 하위구조 2에서 우유의 최소 개수가 0인 분할 결과를 관찰하여, 우유의 최소 분할 개수가 1이상이 되도록 하위구조 2를 변형(DPC 1)한 것이다. 원래 문제는 '1 ≤빵의 개수≤우유의 개수'의 관계로 인해 우유의 배치 개수를 1개 이상으로 추가 설정할 필요가 없다. 그러나 문제 11에서 조건(나)의 변형으로 빵의 개수와 우유 개수 사이의 크기 관계가 변형되었기 때문에 우유의 최소 개수 조건을 추가로 부여할 수 있게 된다(새로운 문제). 다음 표 4와 같이 하위구조 2에서 우유의 최소 개수의 지정 결과에 따라 하위구조 3의 남은 우유의 개수도 변경되나, 풀이 구조는 문제 11과 같다. 따라서 문제 12의 답은 $3 \times {}_3\mathrm{H}_3 + 6 \times {}_3\mathrm{H}_4 + 1 \times {}_3\mathrm{H}_5$이다.

표 4. 문제 12의 풀이 구조

하위구조1	하위구조2	하위구조3
빵 1개,1개,4개 $\to \frac{3!}{2!} = 3$	우유 2개,2개,1개 $\to 1$	남은 우유 3개 $\to {}_3\mathrm{H}_3$
빵 1개,2개,3개 $\to 3! = 6$	우유 2개,1개,1개 $\to 1$	남은 우유 4개 $\to {}_3\mathrm{H}_4$
빵 2개,2개,2개 $\to \frac{3!}{3!} = 1$	우유 1개,1개,1개 $\to 1$	남은 우유 5개 $\to {}_3\mathrm{H}_5$

문제 12. 같은 종류의 빵 6개와 같은 종류의 우유 8개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 다음 조건을 만족시키도록 나누어 주는 경우의 수는?

(가) 각 학생에게 적어도 1개씩 빵과 우유를 나누어 준다.

(나) 각 학생에게 나누어 주는 빵과 우유의 개수의 합은 3이상이다.

문제 11과 문제 12는 하위구조 2에서 우유의 최소 개수에 대한 분할 결과를 변형할 가능성을 찾고, 그렇게 분할하기 위해 필요한 추가 조건을 설정하거나, 기존의 조건 (가)와 (나)를 변형해 만든 문제이다. 나눌 우유의 최소 개수에 대한 기준을 변형했다는 점에서 문제 5, 6, 7과 맥락이 같으나, 문제 11, 12는 각 학생이 받는 빵과 우유 개수의 합을 제시하면서 빵의 분할 개수에 따라 우유의 분할 개수를 개별적으로 적용해야 하는 차이점이 있다. 기준이 되는 대상의 분할 개수에 따라 나머지 대상의 분할 결과가 종속적으로 연결되는 풀이 구조는 중복조합 체계의 여러 문제에서 핵심적인 구조로 평가문제와의 연계성 면에서도 높은 활용성을 갖는다([10]).

문제 10에서 빵의 최대 제한 개수를 추가로 설정한 것처럼, 분할 결과를 관찰하여 우유의 최대 개수에 대한 추가 조건의 가능성을 다시 살펴보자. 표 2에 제시된 원래문제의 분할 구조에서 어떤 학생이 받을 수 있는 우유의 최대 개수는 6개로, 우유를 이미 4개 받은 학생이 남은 우유 2개를 모두 받게 될 때에 해당된다. 각 분할의 경우에 대해, 하위구조 3의 결과를 다시 분석하여 최종적으로 받게 되는 우유의 개수에 대한 제한 조건을 제시할 수 있는지 생각해보자.

표 5. 문제 13의 풀이 구조

하위구조1	하위구조2	하위구조3
빵 1개,1개,4개 $\to \frac{3!}{2!}=3$	우유 1개,1개,4개 $\to 1$	남은 우유 2개 $\to {}_2H_2$
빵 1개,2개,3개 $\to 3!=6$	우유 1개,2개,3개 $\to 1$	남은 우유 2개 $\to {}_3H_2-1$
빵 2개,2개,2개 $\to \frac{3!}{3!}=1$	우유 2개,2개,2개 $\to 1$	남은 우유 2개 $\to {}_3H_2$

표 5와 같이 첫 번째 분할에서 남은 우유 2개를 이미 4개의 우유를 받은 학생에게는 한 개도 주지 않도록 제한할 수 있다. 즉 남은 우유 2개를 나머지 2명의 학생에게만 나누어주면 이 2명이 받는 우유의 총 개수는 최대 3개가 된다. 이때 이미 4개의 우유를 받은 학생은 남은 우유를 받지 않으므로 결과적으로 받을 수 있는 우유의 최대 개수는 4개로 제한된다. 즉 하위구조 3을 ${}_2H_2$의 구조로 변경(DPC 1)함으로써 우유의 최대 개수를 제한할 수 있다. 두 번째 분할에서도 하위구조 2에서 이미 3개의 우유를 받은 학생이 남은 우유 2개를 모두 받게 되는 1가지 경우를 제외하여 ${}_3H_2-1$이 되도록 하위구조 3을 변형(DPC 1)하면, 우유의 최대 개수가 유지된다. 세 번째 분할의 경우에는 하위구조 3을 유지하여도 4개의 최대 제한 조건을 만족하게 된다. 따라서 답이

$3 \times {}_2H_2 + 6 \times ({}_3H_2 - 1) + 1 \times {}_3H_2$인 구조가 되려면 우유의 최대 개수가 4인 제한 조건이 필요하다(새로운 문제). 이를 조건(나)에 반영한 문제를 문제 13이라 하자.

문제 13. 같은 종류의 빵 6개와 같은 종류의 우유 8개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 다음 조건을 만족시키도록 나누어 주는 경우의 수는?
(가) 각 학생에게 적어도 1개의 빵을 나누어 준다.
(나) 각 학생에게 나누어 주는 우유의 개수는 4개 이하이고 빵의 개수보다 크거나 같다.

같은 방법으로 원래문제 표 2에서, 하위구조 3의 두 번째와 세 번째의 결과는 모두 수용하면, 최대로 받게 되는 우유는 5개가 된다. 이를 첫 번째 분할에 적용하려면 이미 4개를 받은 학생에게 남은 우유 2개를 모두 나누어 주는 1가지 경우를 제외하여 유도할 수 있다(DPC 1). 따라서 답이 $3 \times ({}_3H_2 - 1) + 6 \times {}_3H_2 + 1 \times {}_3H_2$인 문제가 되려면 우유의 최대 개수를 5개로 제한하는 추가 조건이 필요하다(새로운 문제). 표 6의 풀이 구조를 갖는 다음 문제 14는 문제 13에서 우유의 최대 개수 조건만 변경된 것이다.

표 6. 문제 14의 풀이 구조

하위구조1	하위구조2	하위구조3
빵 1개,1개,4개 $\rightarrow \frac{3!}{2!} = 3$	우유 1개,1개,4개 $\rightarrow 1$	남은 우유 2개 $\rightarrow {}_3H_2 - 1$
빵 1개,2개,3개 $\rightarrow 3! = 6$	우유 1개,2개,3개 $\rightarrow 1$	남은 우유 2개 $\rightarrow {}_3H_2$
빵 2개,2개,2개 $\rightarrow \frac{3!}{3!} = 1$	우유 2개,2개,2개 $\rightarrow 1$	남은 우유 2개 $\rightarrow {}_3H_2$

문제 14. 같은 종류의 빵 6개와 같은 종류의 우유 8개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 다음 조건을 만족시키도록 나누어 주는 경우의 수는?
(가) 각 학생에게 적어도 1개의 빵을 나누어 준다.
(나) 각 학생에게 나누어 주는 우유의 개수는 5개 이하이고 빵의 개수보다 크거나 같다.

문제 8번부터 문제 14번까지의 문제는 원래문제의 수 조건을 모두 유지하고 있다. 제시된 빵의 개수와 학생 수를 기준으로 수분할 한 결과를 분석해야 하므로, 수 조건의 변화에 따라 조건의 변화도 달라질 수 있다. 예를 들어 같은 종류의 빵 7개를 4명의 학생에게 적어도 1개씩 나누어준다면, '$4, 1, 1, 1$', '$3, 2, 1, 1$', '$2, 2, 2, 1$'의 세 가지 분할의 경우가 생긴다. 이러한 분할의 경우는 문제 8과 같이 서로 다른 개수로 빵을 나누어주는 조건을 생성하지는 못한다. 반면 같은 종류의 빵 7개를 3명의 학생에게 적어도 1개씩 나누어주는 분할 중 '$4, 2, 1$'은 제외하고 '$5, 1, 1$'과 '$3, 3, 1$'만을 답으로 설정하려면, 빵을 홀수 개씩 나누어주는 새로운 조건이 추가되어야 한다. 이처럼 분할 구조에 대한 문제

생성에서는 수 조건에 대한 분할 결과를 일반화하기보다는 분할의 경우를 개별적으로 파악해야 하는 한계가 있다.

그러함에도 분할의 풀이 구조를 통해, 빵의 개수에 대해 조건을 추가하거나, 빵과 우유의 개수 관계를 세분화하였고 빵과 우유 개수의 최대 제한 조건을 추가할 수 있었다. 이러한 추가 아이디어는 바탕문제의 구조에 대한 전체적인 이해만으로는 적용하기 쉽지 않을 수 있다. 원래문제에서 빵과 우유의 개수 관계를 분할의 구조로 분석함으로써 보다 풍부한 문제 생성이 가능하였다.

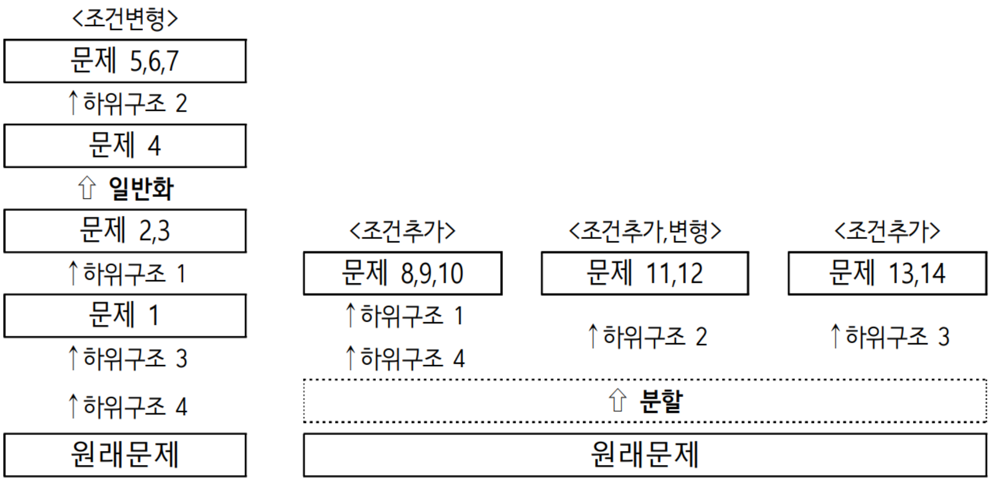

그림 2. 연역적 문제만들기 과정 및 결과

그림 2는 연역적 문제만들기 방법을 통해 생성된 문제들의 과정과 결과를 전체적으로 제시한 것이다. 원래문제의 두 가지 풀이 구조에 따라, 분석된 하위구조가 문제 생성에 미치는 방향과 결과에 차이가 관찰된다.

먼저 중복조합의 바탕문제 구조를 풀이 구조로 분석한 경우, 하위구조들의 변형이 순차적으로 연결되는 결과를 보였고 그에 따라 생성된 문제들도 순차적인 관련성을 갖는다. 원래문제에서 하위구조 4, 3, 1의 변형을 통해 단계적으로 수 조건을 변형하여 문제 1, 2, 3을 생성하는 과정은 문제 4의 일반화를 유도하였고, 이후 문제 4는 문제 5, 6, 7을 생성하는 데 다시 출발점 역할을 하였다. 특히 문제 5, 6, 7은 풀이 과정에서 전략이 되는 아이디어를 하위구조 2로 구체화하여 생성된 것으로, 하위구조의 탐구를 기반으로 하는 연역적 문제만들기의 특징을 잘 내포하고 있다.

문제 8에서 문제 14까지는 중복조합의 본질적인 개념인 분할, 대응의 관점에서 풀이 구조를 재분석하여 생성된 것으로 이때 하위구조의 변형은 독립적인 문제의 변형을

유도한다. 하위구조 1과 하위구조 3의 분석을 통해 각각 빵과 우유의 개수에 대한 제한 조건을 추가한 문제가 생성되었다. 원래문제보다 복잡한 수 조건을 부여하게 되어 분할, 대응의 풀이 구조를 적극적으로 활용하도록 유도하는 문제가 되었다. 특히 분할 구조에서도 하위구조 2의 분석을 통해 빵과 우유 개수에 대한 크기 관계 조건을 합의 관계로 새롭게 변형한 문제를 만들 수 있었다. 원래문제와 외형적으로 다른 조건의 문제가 되었으나, 원래와 동일한 풀이 구조를 적용해 해결할 수 있는 문제를 생성하였다는 의미가 있다.

3.3. 결론 및 제언

연역적 문제만들기는 문제 및 그 해결 과정을 하나의 구조로 분석하고, 풀이를 구성하는 하위구조에서 가변 요소를 찾은 후, 변형을 허용하기 위해 이전 하위구조에서 필연적으로 바꾸어야 할 다른 요소를 거꾸로 찾아가면서 결국 문제의 조건을 변형하게 되는 방법이다. 따라서 연역적 문제만들기의 과정과 결과의 방향을 결정하는 원래문제 및 풀이 구조의 선택은 중요한 기준이 된다. 본 연구에서는 경우의 수 주제 중에서, 배치형으로 진술된 중복조합 문제를 원래문제로 선택하고 두 가지 풀이 구조에 대해 하위구조의 관계를 분석하여 연역적 문제만들기 방법으로 14개의 새로운 문제를 생성하였다. 그 결과 제시할 수 있는 연역적 문제만들기의 특징은 다음과 같다.

첫 번째, 연역적 문제만들기를 통해 경우의 수 문제에서 핵심적인 조건인 수 조건을 일반화할 수 있었다. 원래문제는 '${}_{\text{학생수}}\mathrm{H}_{\text{남은 빵 개수}} \times {}_{\text{학생수}}\mathrm{H}_{\text{남은 우유 개수}}$'인 답의 구조를 뼈대로 갖는다. 하위구조의 탐구 과정에서 조건의 변형 관계는 이러한 핵심 구조를 유지하는 범위 내에서 적용되었다. 그 결과 모든 수 조건을 일반화하여 제시한 문제는 원하는 답을 미리 설정할 수 있고, 그에 따라 문제의 수 조건을 바로 지정할 수 있다는 점에서 활용도가 높다. 의도한 답을 제시할 때 중복조합의 수 ${}_n\mathrm{H}_r$의 계산 수준을 미리 고려할 수 있고, 관련 문제를 필요한 만큼 여러 개 생성할 수 있다. 따라서 풀이 구조의 습득을 위한 연습문제의 제공, 형성평가 문제 제작 등에 유용하게 활용될 수 있다. 또한 문제 생성에서 일반화된 결과를 유도하는 과정은 학생들에게 조건들의 관계를 구조적으로 분석하게 하므로 결과적으로 경우의 수 문제의 해결력를 키우는 데 도움을 줄 수 있다.

두 번째, 연역적 문제만들기는 풀이 구조의 선택에 따라 다양하고 새로운 조건을 생성할 수 있는 유연성을 갖는다. 중복조합 문제의 분할과 대응의 풀이 구조를 적용해 원래문제의 조건 형식을 변형하여 새로운 형태의 조건을 생성할 수 있었다. 이는 수 조건의 일반화와는 다른 방향의 문제 생성으로, 분할을 통해 드러난 하위구조의 개별 특징에 집중하여 개수의 관계 조건을 다채롭게 제시하는 결과를 보였다. 분할의 관점을 요구하는 이러한 문제 결과는 중복조합의 수 ${}_n\mathrm{H}_r$를 구성하는 부분 요소를 분석하고 관찰하여 중복조합 개념의 구체적 이해를 유도하므로 다양한 풀이 구조를 갖는 평가문제를 대비하는 데 실질적인 도움이 될 수 있다.

세 번째, 연역적 문제만들기는 하위구조를 추출하고 분석하는 과정적 측면의 활용도가 높다. 하위구조의 분석은 풀이 과정의 단계 분석보다 세심한 과정으로, 문제 해결의 전략적인 아이디어나 연결 관계까지 하위구조로 구체화하여 분석할 수 있어야 한다. 원래문제의 풀이 과정에서 '각 학생이 받은 빵의 개수만큼 우유의 개수를 나누어주는' 방법은 전략적인 아이디어로 제시되지만, 이는 빵과 우유를 나누어주는 각각의 풀이 단계를 연결하는 역할을 한다. 연역적 문제만들기에서는 이러한 전략을 구체화하여 하위구조로 드러내어 분석함으로써 다양한 변형 조건을 생성하는 매개로 활용할 수 있게 한다. 3.2절에서 제시한 문제 5, 6, 7과 문제 11, 12는 이러한 분석을 통해 생성된 문제로 다른 문제들에 비해 창의적이고 새로운 조건을 제시할 수 있었다. 풀이 과정을 구조적인 관점에서 분석할 수 있는 힘을 기르고 문제를 창의적으로 해석할 수 있도록 돕는 방법으로 연역적 문제만들기의 과정적 측면을 강조할 수 있다.

네 번째, 연역적 문제만들기의 결과로 생성된 문제들은 서로 유기적인 관계를 갖는 문제 집합을 구성하게 된다. 14개의 문제들은 하나의 원래문제에서 파생되었으며 유사한 풀이 구조로 연결되어 있다. 두 가지 풀이 구조로 분석되어 각각의 생성 문제들의 관련성이 분리될 것으로 보일 수 있으나, 바탕문제 구조와 분할 구조는 원래 본질적으로 같은 개념이며 전체와 부분의 관점으로 재해석될 뿐이다. 생성된 문제들은 원래문제와는 물론 서로 간에도 구조적인 연결 고리를 갖기 때문에 교수학적 필요에 맞게 재구성하여 통합적인 대상으로 활용할 수 있다. 예를 들어, 생성된 문제들을 하나의 학습지에 담아 재구성하여 제시한다면 학생들은 조건의 변화를 관련지어 비교할 수 있고 유사한 풀이 구조를 획득해가는 과정을 체계적으로 경험하고 연습해볼 수 있을 것이다.

연역적 문제만들기는 원래문제의 성격과 하위구조의 분석 내용에 따라 여러 방향으로 전개될 수 있으며, 그 결과 답이 보장되는 관련 문제를 다양하게 생성할 수 있다. 본 연구는 이러한 연역적 문제만들기의 과정적 측면과 결과의 유용성을 실제 교수 환경에서 다루어보지는 못한 한계를 지닌다. 후속 연구를 통해 학생들의 탐구 활동이나 평가의 관점으로도 연역적 문제만들기의 방법을 확장해볼 수 있을 것이다.

References

1. Cho, H. (2018). *Analysis of characteristics presented in poblem posing based on Permutations and Combinations of high school students* [Master's thesis, Ewha Womans University].
2. Choi, I., Cho, H. (2016). Eye Movements in Understanding Combinatorial Problems. *Journal of Eucational Research in Mathematics, 26*(4), 635-662.

3. Choi, Y. (2011). *A Study on combinations with repetition via occupancy problems* [Master's thesis, Seoul National University].
4. Han, I. (2009). An Analysis of Geometrical Differentiated Teaching and Learning Materials Using Inner Structure of Mathematics Problems. *Communications of Mathematical Education, 23*(2), 175-196.
5. Han, I. (2020). *Learning Polynomials and Knowing Mathematics*. Seoul: Kyowoo.
6. Han, I. (2024). A Making Triangle Construction Problems Using Deductive Problem Making Method. *Communications of Mathematical Education, 38*(4), 609-630. `https://doi.org/10.7468/jksmee.2024.38.4.609`
7. Han, I., Huh, E., & Seo, E. (2023). A Concretization and Application of Deductive Problem Making Method. *Communications of Mathematical Education, 37*(4), 653-674. `https://doi.org/10.7468/jksmee.2023.37.4.653`
8. Han, I., Lee, J. (2009). A Study on Solving Triangle Construction Problems Given by a Midpoint of Side and Other Tow Points. *Journal of the Korean school mathematics society, 12*(4), 365-388.
9. Hong, G. (2011). *The Effects of Permutation-Combination Instruction Using Structural-Mapping on 2nd graders in Highschool* [Master's thesis, Korea National University of Education].
10. Huh, E. (2024). *A Study on Constructing the System of Combination with Repetition Problems based on the Didactical Analysis* [Doctoral dissertation, Gyeongsang National University].
11. Joo, H., Han, H. (2016). The anlaysis of middle school students' problem posing types and strategies. *The Mathematical Education, 55*(1), 73-89. `https://doi.org/10.7468/mathedu.2016.55.1.73`
12. Kim, B., Kim, Y., Kang, H., Kim, S., Do, J., Park, J., Song, C., Lim, H., Choi, I., Han, S., & Han, I. (2024). *Mathematics Education and Problem Solving: Theory, Trends, and Prospects*. Seoul: Kyungmun publ.
13. Kim, Y. (2017). *An analysis of thinking process on converting problem types in combinatorial problem solving* [Master's thesis, Korea National University of Education].
14. Lee, J. (2004). *Students' understanding and problem-solving strategy for combinatorial problems based on the types of combinatorial problem* [Master's thesis, Seoul National University].
15. Lee, J. (2006). *A Structural Isomorphism between Problems Counting the Number of Combinations* [Master's thesis, Seoul National University].
16. Ministry of Education (2022). *Mathematics Currirulum*. Sejong: MOE.
17. Park, M. (2015). *Teaching Relational Structure via Mathematical Problem Analogy* [Doctoral dissertation, Seoul National University].
18. Roberts, F. S. (1984). *Applied Combinatorics*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

19. Shin, D. (2021). Pre-Service Teacher's Noticing in Peer Evaluation of Mathematical Problem Posing: Focusing on permutation and combination. *Journal of the Korean School Mathematics, 24*(1), 19-38. https://doi.org/10.30807/ksms.2021.24.1.002

[a]Eun Sook Huh, Teacher, Daea High School:
Email address: orienic@naver.com