J. Korean Soc. Math. Edu. Ser. B: Theoretical Math. Pedagogical Math.
https://doi.org/10.7468/jksmeb.2025.32.2.67 ISSN(Print) 3059-0604
Volume 32, Number 2 (May 2025), Pages 67–85 ISSN(Online) 3059-1309

고등학교에서 극한값 계산의 대수적 접근
ALGEBRAIC APPROACH TO CALCULATIONS OF LIMITS IN HIGH SCHOOL

유익승 [a]

Abstract. This study explores how the initial terms of the series expansions of exponential, logarithmic, and trigonometric functions can be derived using substitution and various algebraic techniques, without relying on differentiation. Based on these findings, the study discusses several educational implications, particularly in the context of high school mathematics instruction.

1. 서론

우리나라 중등학교 수학과 교육과정은 크게 보면 대수와 기초해석(미적분학), 기하, 확률 및 통계로 구성되어 있다고 할 수 있을 것이다. 특히, 고등학교에서 다루는 기하는 도형을 대수식으로 표현하여 탐구하는 해석기하학이라는 것을 생각하면, 고등학교에서 대수식의 특징을 보고 변환시키는 능력은 수학적 능력을 구성하는 중요한 요소라고 할 수 있을 것이다. [2]에 의하면, 수학자 꼴모고로프(Kolmogorov)는 복잡한 문자식을 변형하고 일반적인 방법으로 접근할 수 없는 방정식의 풀이를 위해 성공적인 방법을 찾아내는 것과 같은 대수적 조작의 발달은 수학적 재능을 구성하는 중요한 요소라고 하였다.

실제로, 고등학교의 수학교실에서 진행되는 수학수업을 생각해 보면, 학생들은 3년 내내 주어진 수식을 인수분해하고 전개하면서 방정식을 풀고, 부등식을 풀고, 함수를 학습하는 등의 활동을 하게 된다. 결국, 문제에서 주어진 수식으로부터 어떠한 특징을 찾아내서, 그 특징을 이용해 문제해결의 실마리를 찾느냐 그렇지 않느냐가 고등학교 수준의 문제해결에서 성패를 좌우한다고 할 수도 있을 것이다.

Received by the editors April 15, 2025. Revised May 7, 2025. Accepted May 10, 2025.
2020 *Mathematics Subject Classification.*97D40, 33B10.
Key words and phrases. Functions (exponential, logarithmic, trigonometric, etc.) in mathematics education
주요어: 극한, 삼각함수, 지수함수, 로그함수, 급수 전개

국내 연구들 중에는 수식의 특징에 주목하여 수식으로부터 다양한 정보들을 찾아 성공적인 문제해결의 전략을 제시하려는 연구들이 있었다. [7]에서는 $\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+xy+\dfrac{y^2}{2}=169$, $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$와 같은 대수식의 기하학적 의미를 분석하여 문제해결의 실마리를 찾으려는 시도를 하였고, [8]에서는 수식에 포함된 정보를 수정보, 논리정보, 속성정보, 관계정보, 조작 또는 활동에 관한 정보로 분류하고, 이를 활용하여 성공적인 문제해결의 접근 방법을 제시하였다. 그리고 [3]에서도 대수식의 틀(뼈대), 대칭성, 차수, 식에 포함된 구체적인 양이나 식의 패턴 분석 등을 통해 성공적인 문제해결을 위한 탐색 수행의 사례들을 소개하였다.

살펴본 것과 같이, 대수식의 특징을 분석하고, 대수식을 목적에 맞게 효과적으로 변환하는 것은 문제해결의 성패를 좌우할 정도로 중요하다는 것을 알 수 있다. 본 연구에서는 고등학교에서 다룰 수 있는 심화된(난이도가 높거나 복잡한) 극한 문제에 대해 대수식의 변환을 통해 성공적으로 해결하는 방법을 고찰할 것이다.

가령, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ 등과 같은 정형적인 극한 문제들은 단위원에서 도형들의 넓이의 대소관계를 통해 부등식을 얻고 샌드위치 정리를 통해 극한값을 계산할 수 있다. 즉, 대수식의 특별한 변환이 없이도 극한값을 구하는 문제를 해결할 수 있다. 그러나 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}$, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$, $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x-\frac{1}{6}x^3}{x^5}$ 등과 같은 비정형적인 문제의 해결에서는 상황이 다르다. 특히, 고등학교의 교육과정 범위 내에서 이러한 문제를 해결하기 위해서는 대수식을 변환시킬 수 있는 능력이 필수적으로 요구된다.

본 연구에서는 이러한 비정형적인 극한 문제의 해결에 관련된 수식의 대수적 변환을 치환을 중심으로 고찰하고, 이에 관련된 구체적인 사례들과 그 특징을 제시할 것이다. 특히, 극한에서는 $x\to0$인 경우에 $x=2t$로 치환하여도 $t\to0$으로 수렴하게 되므로, 다른 영역의 대수 문제들에 비해 치환을 활용할 수 있는 가능성의 폭이 훨씬 넓다. 본 연구의 결과는 고등학교 수학교실에서 학생들의 대수적 소양을 기르고, 문제해결 능력을 기르는 한 가지 방법으로 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

2. 연구의 배경

2.1. 고등학교 '미적분'에서 함수의 극한

극한은 고등학교 '미적분' 교과에서 다루며, 수열의 극한을 먼저 다루고, 지수함수와 로그함수의 극한, 삼각함수의 극한 등을 다룬다. 고등학교에서 극한 개념은 수열의 극한 외에도 '수학 II' 교과에서 함수의 극한을 다루는데, 함수의 극한과 수열의 극한은

직관적인 접근을 특징으로 한다. 가령, [6]에는 함수의 극한을 다음과 같이 기술하고 있다.

> 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다고 한다. 이때, L을 함수 $f(x)$의 $x = a$에서의 극한값 또는 극한이라 하고, 이것을 기호로 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 또는 $x \to a$일 때 $f(x) \to L$와 같이 나타낸다. ([6], p.11)

이때, 직관적인 접근이라는 것은 x의 값이 a에 '한없이 가까워질 때', $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 '한없이 가까워지면' 등과 같은 표현에 관련된다. 실제로, '한없이 커진다', '한없이 가까워진다'는 것이 얼만큼의 양을 의미하는지는 엄밀하게 규정할 수 없다. [5]에는 이러한 '가까워진다'는 표현은 은유적인 표현이며, 더 엄밀한 표현으로 수학에서는 $\varepsilon - \delta$ 방법을 이용한다고 했다.

고등학교 '미적분' 교과서에서는 함수의 극한, 수열의 극한에서 배운 극한 개념을 확장하여 지수함수의 극한, 로그함수의 극한, 삼각함수의 극한을 다룬다. 예를 들어, [4]에서는 지수함수의 극한에 대해 $a > 0, a \neq 1$일 때, 실수 r에 대하여 $\lim_{x \to r} a^x = a^r$이 성립함을 다음 그래프에서 알 수 있다'([4], p.53)고 기술하고 있다.

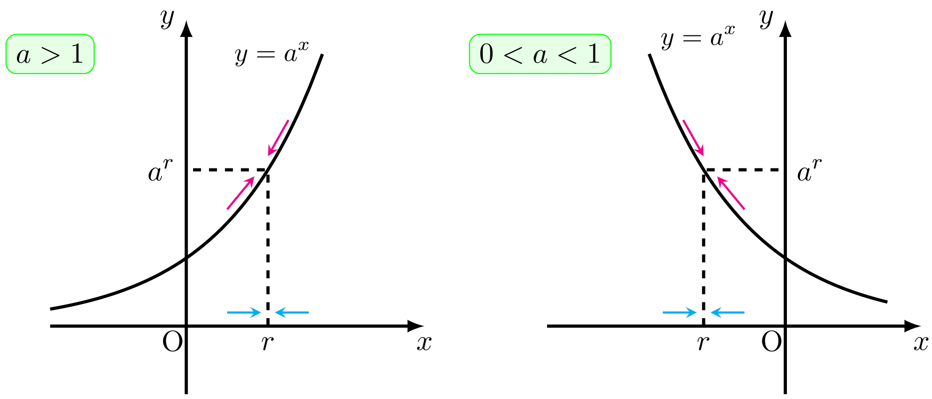

그림 1. 지수함수의 극한([4], p.53)

그리고 이러한 극한에 근거하여 지수함수 $y = a^x$가 모든 실수에서 연속이라는 것, $y = a^x$의 극한이 $a > 1$일 때 $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$이 되며, $0 < a < 1$일 때, $\lim_{x \to \infty} a^x = 0$, $\lim_{x \to -\infty} a^x = \infty$가 된다는 것을 특별한 정당화 없이 기술하고 있다. 로그함수나 삼각함수의 극한에 대해서도 지수함수의 경우와 유사한 방법으로 정당화를 시도하고 있다.

살펴본 것과 같이, 고등학교 '미적분'에서 다루는 극한은 시각적인 정당화에 초점을 둔 직관적 접근이므로, 이를 이용하여 지수함수, 로그함수, 삼각함수 등에서 극한의 존재성을 증명할 수는 없다. 이러한 함수에서 극한의 존재성을 증명하려면, $\varepsilon-\delta$ 방법으로 알려진 방법으로 함수의 극한을 정의해야 한다.

우리나라에서 $\varepsilon-\delta$ 방법에 의한 극한의 정의는 대학교 수준의 미적분에서 다루어진다. 예를 들어, [10]에서는 다음과 같이 $\varepsilon-\delta$ 방법으로 다음과 같이 함수의 극한을 정의하고 있다.

> 임의의 ε에 대해서 대응하는 $\delta > 0$가 존재하고 $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$을 만족하면, L을 x가 a에 근접할 때 $f(x)$의 극한값이라 하고, $\lim_{x\to a} f(x) = L$로 표기한다. ([10], p.12)

이렇게 함수의 극한을 정의하면, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극한값이 존재하는지 그렇지 않은지를 증명할 수 있게 된다.

결국, 고등학교 '미적분'에서 다루는 극한 문제는 극한값의 존재성을 따지는 문제가 아니라, 극한값을 구하는 문제로 한정될 수밖에 없다. 즉, 고등학교 '미적분' 교과서에 흔히 볼 수 있는 $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$의 극한값을 구하라는 문제는 이미 $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$의 극한값이 존재한다는 것을 가정한 상태에서 극한값을 구해보라는 것을 의미할 것이다.

본 연구에서 다루는 극한값 계산 문제의 해결 방법도 같은 맥락에서 출발하고 있다. 즉, 주어진 문제의 극한값이 존재한다(또는 극한이 수렴한다)고 가정하고, 이를 바탕으로 극한값을 구하는 문제의 해결 방법을 제시하고 있다. 예를 들어, 본 연구에서는 극한값의 존재를 가정하는 것으로부터 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3} = l$로 치환하고, $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$을 대수적으로 변환하여 l을 포함하는 다른 식을 만들어서 l의 값을 구할 것이다.

이것은 [11]에 제시된 식 $1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}$의 값을 구하는 문제와 유사한 접근으로 볼 수 있다. 이 식의 값을 구하기 위해, $1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}} = t$로 치환한다. 그러면, $t = 1+\dfrac{1}{t}$이 되며 $t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$를 얻게 된다. 이때, $1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}$를 t로 치환할 때, $1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}$의 값이 수렴하거나 발산하는지는 조사하지 않는다. 이러한 풀이에서는 식 $1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}$이 특정한 값을 가진다는 것을 가정하게 된다.

결국, 본 연구에서 제시하는 대수적 변형을 통해 극한값을 구하는 문제의 해결 방법은 극한값이 존재하는 경우에 대해 국한하여 적용할 수 있다. 한 가지 주의할 것은, 본 논문에서 제시하는 방법을 수학교실에서 적용하려면, 교사는 문제해결 과정에서 학생들에게 극한값의 존재성을 가정한다는 것을 명확하게 인식시키는 것이 중요할 것이다.

2.2. 함수의 극한 문제에서 대수적 변형

함수의 극한을 구하는 과정에서 많이 사용되는 대수적 변형 방법은 로피탈의 정리(L'Hospital's Rule), 테일러 급수(Taylor series) 등을 이용하는 것이다. 특히, 로피탈의 정리는 고등학교의 일부 학생들이 문제해결에 사용하려는 경우도 있지만, 로피탈의 정리, 테일러 급수 등은 고등학교 수학과 교육과정을 벗어난 내용이므로 고등학교 수학교실에서나 다양한 시험에서도 이러한 방법의 사용은 배제되어 있다.

특히, 다음 문제는 2010학년 대학수학능력시험 6월 모의평가 문항 27번으로 출제된 것인데, 로피탈의 정리를 사용하면 극한 문제가 더 복잡해지는 흥미로운 문제이다. 아마 로피탈의 정리를 사용하여 곧바로 문제를 해결할 수 있었다면, 출제되지 못했을 것이다.

문제. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{1-\sin x} - e^{1-\tan x}}{\tan x - \sin x}$의 값은?

실제로, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{1-\sin x} - e^{1-\tan x}}{\tan x - \sin x}$에 로피탈 정리를 한 번 사용하면, 다음과 같은 등식을 얻을 수 있다.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{1-\sin x} - e^{1-\tan x}}{\tan x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^{1-\sin x}\cos x + e^{1-\tan x}\sec^2 x}{\sec^2 x - \cos x}$$

얻어진 식에서 곧바로 극한값을 구하지 못하므로, 다시 한번 로피탈 정리를 쓰려고 시도할 수 있다. 특히, $x \to 0$일 때 $\sin x \to 0$, $\tan x \to 0$이므로 분자와 분모가 모두 0으로 수렴한다. 다시 로피탈의 정리를 사용하여, 분자를 미분하면 $e^{1-\sin x}(\cos^2 x + \sin x) + e^{1-\tan x}(2\sec^2 x \tan x - \sec^4 x)$이 되고 분모를 미분하면 $2\sec^2 x \tan x + \sin x$가 된다. 즉, 다음과 같은 등식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0} \frac{-e^{1-\sin x}\cos x + e^{1-\tan x}\sec^2 x}{\sec^2 x - \cos x} \\ &\qquad = \frac{e^{1-\sin x}(\cos^2 x + \sin x) + e^{1-\tan x}(2\sec^2 x \tan x - \sec^4 x)}{2\sec^2 x \tan x + \sin x}\end{aligned}$$

결국, 로피탈의 정리를 이용한 접근 방법은 이 문제에 대해서는 효과적인 방법이 되지 못한다. 이 문제를 해결하기 위해서는 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{1-\sin x} - e^{1-\tan x}}{\tan x - \sin x}$에서 식 $\dfrac{e^{1-\sin x} - e^{1-\tan x}}{\tan x - \sin x}$의 대수적 변형과 치환이 필요하다. 분자 $e^{1-\sin x} - e^{1-\tan x}$에서 $1 - \sin x = 1 - \tan x + \tan x - \sin x$이므로, 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\begin{aligned}e^{1-\sin x} - e^{1-\tan x} &= e^{1-\tan x + \tan x - \sin x} - e^{1-\tan x} \\ &= e^{1-\tan x}e^{\tan x - \sin x} - e^{1-\tan x} = e^{1-\tan x}\left(e^{\tan x - \sin x} - 1\right)\end{aligned}$$

그러면, 극한값을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{1-\sin x}-e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{1-\tan x}\left(e^{\tan x-\sin x}-1\right)}{\tan x-\sin x}$$
$$=\lim_{x\to0}e^{1-\tan x}\cdot\frac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\tan x-\sin x}$$

이제, $t=\tan x-\sin x$라 치환하면 $x\to0$이면 $t\to0$이므로, 다음과 같이 극한값을 구하게 된다.

$$\lim_{t\to0}e\cdot\frac{e^t-1}{t}=\lim_{t\to0}e\cdot\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=e$$

결국, 살펴본 문제를 해결하기 위해서는, 대수적 변형으로 (1) $e^{1-\sin x}$에서 지수 $1-\sin x$에 $\tan x$를 더하고 빼며, (2) 지수법칙을 이용하여 다음과 같이 식을 변형하였다.

$$e^{1-\tan x+\tan x-\sin x}-e^{1-\tan x}=e^{1-\tan x}e^{\tan x-\sin x}$$

그리고 치환과 관련하여서는, $\lim_{x\to0}e^{1-\tan x}\cdot\dfrac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\tan x-\sin x}$에서 $t=\tan x-\sin x$로 치환하였다. 이 식에 $\tan x-\sin x$가 있다는 것을 쉽게 볼 수 있으므로, 치환 자체는 특별히 어렵지는 않았을 것이다.

살펴본 것과 같이, 고등학교 수준에서 복잡하거나 차수가 높은 식을 포함하는 식의 극한값을 구하는 경우에는 로피탈의 정리, 테일러 급수 등을 이용하라는 것이 아니라, 적당히 식을 변형하거나 치환하여 극한값을 구하는 것이 출제의도가 될 것이다.

고등학교에서 다루는 $\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$, $\lim_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$, $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}$, $\lim_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}$ 등과 같은 분수꼴인 식에 대해 극한값을 구하는 문제에서 분모의 차수가 1인 경우에는 특별한 대수적 변환이 필요하지 않는 경우가 대부분이다. 그러나, $\lim_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}$, $\lim_{x\to0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}$와 같이 분모의 차수가 2이상인 경우에는 곧바로 극한값을 구하기가 쉽지 않은 경우가 많다. 이러한 경우에 로피탈의 정리, 테일러 급수 등을 이용할 수도 있지만, 여기서는 이러한 고등학교 교육과정을 벗어난 방법들을 사용하지 않고 대수적 변환을 통해 극한값을 구하는 방법을 살펴볼 것이다.

고등학교 수학에서 다룰 수 있는 대수적 변환 방법으로는 변수 치환, 삼각함수의 배각 공식, 항등식 변형, 인수분해 등을 들 수 있다. 이러한 대수식의 변환을 통해 높은 차수의 식을 포함하는 극한 문제를 여러 단계로 쪼개거나 알려진 기본 극한으로 환원시켜 극한값을 구할 수도 있다.

예를 들어, $\sin 2x=2\sin x\cos x$와 같은 사인함수의 배각 공식을 반복 적용하거나 $\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ 등의 항등식을 활용하여 식 $\dfrac{x-\sin x}{x^3}$에 테일러 급수를 쓰지 않고도 식을 변형시킬 수 있다.

본 연구에서는 $\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$, $\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}$, $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$, $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$, $\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x-\frac{1}{6}x^3}{x^5}$ 등과 같이 분모의 차수가 2이상인 식들에 대해 '주어진 문제의 극한값이 존재한다'는 가정에 근거한 치환과 대수식의 변형을 이용하여 극한값을 구하는 방법을 고찰할 것이다.

한 가지 주목할 것은 $\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$의 경우에 $x=2t$로 치환하고 사인 함수의 2배각 공식을 사용하여 극한값을 구하는 방법을 인터넷(YouTube)에 검색하면 찾을 수 있다는 것이다. 예를 들어, [1], [9] 등에 소개된 방법은 본 연구의 정리 1에 제시된 방법과 유사하지만, 차이점은 [1], [9] 등에서는 다른 삼각함수, 지수함수, 로그함수, 무리함수 등의 극한값을 구하는 것으로 확장을 시도하지는 않았다는 것이다.

본 연구에서는 삼각함수의 극한값을 구하는 문제에서 극한 변수 x를 $2t$로 치환하는 방법을 지수함수, 로그함수, 무리함수의 극한값의 계산에도 확장하여 그 적용 가능성을 탐색할 것이며, 얻어진 결과를 바탕으로 삼각함수나 지수함수를 다항식으로 전개하는 테일러 급수와의 연결 가능성도 제시할 것이다.

3. 연구 결과 및 결론

본 연구에서 대수적 접근을 통한 극한값 계산은 다음과 같은 과정으로 구성된다. (1) 극한 변수 x를 $x=2t$로 치환하고, 구하는 극한값도 l이라 놓는다. (2) 적절한 대수적 방법을 활용하여 대수식을 변환하여 극한값을 계산한다. 이때, 얻어진 극한값은 l을 포함한 식이다. (3) 구하는 극한값을 l이라 놓은 것과 구해진 l이 포함된 극한값을 등식으로 연결해 일차방정식을 얻는다. 이 일차방정식을 풀어 구하는 극한값 l을 얻는다.

먼저 주어진 극한 문제에서 식의 분모의 차수가 극한값이 존재할 때보다 크거나 작을 때를 살펴보자. 가령, 극한 $\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2}$을 계산한다고 하자. 우선, $x=2t$로 치환하고, $l=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2}$라 놓자. 그러면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} l=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2}&=\lim_{t\to0}\frac{2t-\sin 2t}{4t^2}=\lim_{t\to0}\frac{2t-2\sin t\cos t}{4t^2}\\ &=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t+\sin t(1-\cos t)}{t^2}\\ &=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\left(\frac{t-\sin t}{t^2}+\frac{\sin t(1-\cos t)}{t^2}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^2}+\lim_{t\to0}\frac{\sin t(1-\cos t)}{t^2}\right) \end{aligned}$$

이때, $\dfrac{\sin t(1-\cos t)}{t^2} = \dfrac{\sin t}{t} \cdot \dfrac{(1-\cos t)}{t^2} \cdot t$이므로, $t \to 0$일 때 $\dfrac{\sin t(1-\cos t)}{t^2}$는 0에 수렴한다. 따라서, 다음과 같은 극한값을 구할 수 있다.

$$l = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^2} + \lim_{t\to 0}\frac{\sin t(1-\cos t)}{t^2}\right) = \frac{1}{2}l$$

결국, l에 대한 일차방정식 $l = \dfrac{1}{2}l$을 얻을 수 있으며, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2} = 0$을 얻는다.

마찬가지 방법으로, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^4}$을 계산하면 $l = \dfrac{1}{2}(l+\infty)$를 얻게 된다. 이로부터, $l = \infty$임을 알 수 있다. 따라서 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$의 극한을 고려하는 것이 타당함을 알 수 있다. 이제, 이 극한이 l에 수렴함을 가정하면, 다음을 증명할 수 있다.

정리 1. 다음을 증명하시오.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{3!}$$

증명. $x = 2t$로 치환하자. $x \to 0$이면 $t \to 0$이다. 구하는 극한값을 l이라 하면

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{t\to 0}\frac{2t-\sin 2t}{8t^3} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{2t-2\sin t\cos t}{8t^3} = \lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t\cos t}{4t^3} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t+\sin t(1-\cos t)}{4t^3} \\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{t-\sin t}{t^3} + \frac{1}{4}\left(\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1-\cos t}{t^2}\right)\right) \end{aligned}$$

이때, sin 반각 공식에 의해 $1-\cos t = 2\sin^2\dfrac{t}{2}$이므로, 다음을 알 수 있다.

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{4}\left(\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1-\cos t}{t^2}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}\right) = \frac{1}{8}$$

이로부터 $l = \dfrac{1}{4}l + \dfrac{1}{8}$이 유도되며, $l = \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3!}$이다. □

정리 1에서는 극한 변수 x를 $x = 2t$로 치환한 후에, 얻어진 $\sin 2t$에 사인 함수의 2배각 공식을, $1-\cos t$에 사인 함수의 반각 공식을 이용하여 원하는 형태로 식을 변형시켰다. 이제, 얻어진 극한값 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{3!}$을 살펴보자.

이 등식에서 x^3, x를 이항하면, $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{3!}$과 같이 쓸 수 있다는 것을 알 수 있다. $\sin x$의 테일러 급수 전개가 다음과 같다는 것을 고려하면, 얻어진 결과는 $\sin x$의

테일러 급수 전개의 처음 두 항에 해당한다는 것을 알 수 있다.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

이것을 그래프로 나타내면, 그림 2와 같이 근사공식의 차수가 높아질수록 원점을 중심으로 근사되는 구간의 길이가 길어짐을 알 수 있다.

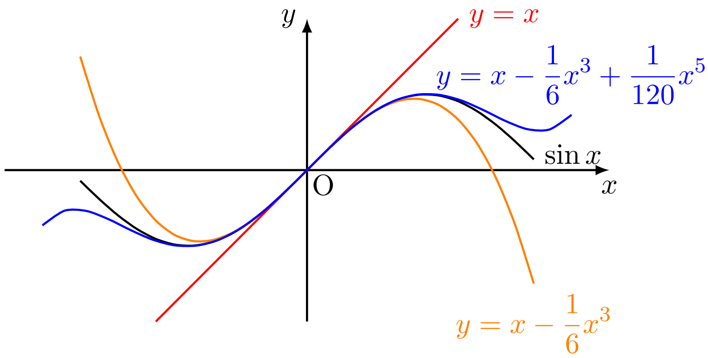

그림 2. $y = \sin x$ 그래프의 근사 다항식들

고등학교 교육과정에서 탄젠트 함수의 극한인 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$로부터 $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$이 성립함을 쉽게 유도할 수 있다. 탄젠트 함수의 경우도 사인함수에서 논의한 분모의 차수를 키우거나 낮추는 것과 탄젠트 함수의 2배각 공식을 적용하면 비슷한 방법으로 다음을 증명할 수 있다. 사인함수에서 했던 분모의 차수가 2인 경우와 4인 경우는 이후 논의에서는 생략하기로 한다.

정리 2. 다음을 증명하시오.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

증명. $x = 2t$로 치환하자. $x \to 0$이면 $t \to 0$이다. 구하는 극한값을 l이라 하고 탄젠트 함수의 2배각 공식을 적용하자. 그러면, 다음과 같이 식을 변형할 수 있다.

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{t\to 0} \frac{\tan 2t - 2t}{8t^3} \\ &= \frac{1}{8} \lim_{t\to 0} \frac{\frac{2\tan t}{1-\tan^2 t} - 2t}{t^3} = \frac{1}{4} \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\tan t}{1-\tan^2 t} - t}{t^3} \end{aligned}$$

이제, $\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\tan t}{1-\tan^2 t}-t}{t^3}$를 정리하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\tan t}{1-\tan^2 t}-t}{t^3} &= \frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\tan t - t + t\tan^2 t}{t^3(1-\tan^2 t)}\right)\\ &= \frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\tan t - t}{t^3}+\frac{t\tan^2 t}{t^3}\right)\cdot\frac{1}{1-\tan^2 t}\\ &= \frac{1}{4}(l+1)\end{aligned}$$

이로부터, $l = \frac{1}{4}(l+1)$이므로, $l = \frac{1}{3}$임을 알 수 있다. □

얻어진 극한값 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{1}{3}$을 살펴보자. 이 등식에서 x^3, x를 이항하면, $\tan x \approx x + \frac{1}{3}x^3$과 같이 쓸 수 있다는 것을 알 수 있다. $\tan x$의 테일러 급수 전개가 다음과 같다는 것을 고려하면, 얻어진 결과는 $\tan x$의 테일러 급수 전개의 처음 두 항에 해당한다는 것을 알 수 있다.

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots$$

이제 코사인 함수의 경우를 살펴보자. 고등학교 교육과정에서는 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$의 값을 구하는데 분자, 분모에 $1+\cos x$를 곱하고 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$이 성립함을 이용하여 그 값이 $\frac{1}{2}$임을 증명한다. 이제 코사인 배각공식과 적절한 대수적 조작, 그리고 수렴한다는 가정을 통해 다음을 증명할 수 있다.

정리 3. 다음을 증명하시오.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4} = \frac{1}{4!}$$

증명. $x = 2t$로 치환하자. $x \to 0$이면 $t \to 0$이다. 구하는 극한값을 l이라 하면

$$\begin{aligned}l = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4} &= \lim_{t\to 0}\frac{\cos 2t - 1 + 2t^2}{16t^4}\\ = \lim_{t\to 0}\frac{2\cos^2 t - 2 + 2t^2}{16t^4} &= \lim_{t\to 0}\frac{\cos^2 t - 1 + t^2}{8t^4}\end{aligned}$$

이제, 얻어진 식의 분자를 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{\cos^2 t-1+t^2}{8t^4}&=\lim_{t\to 0}\frac{(\cos t-1)(\cos t+1)+t^2}{8t^4}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{(\cos t-1+\frac{1}{2}t^2)(1+\cos t)+t^2-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t^2\cos t}{8t^4}\\&=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\cos t-1+\frac{1}{2}t^2}{8t^4}\cdot(1+\cos t)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos t}{8t^2}\right\}\\&=\frac{1}{4}l+\frac{1}{32}\end{aligned}$$

이로부터, $l=\dfrac{1}{24}=\dfrac{1}{4!}$이다. □

얻어진 극한값 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{1}{2}x^2}{x^4}=\frac{1}{4!}$을 살펴보자. 이 등식에서 x^4, 1, $\dfrac{1}{2}x^2$을 이항하면, $\cos x\approx 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}$과 같이 쓸 수 있다는 것을 알 수 있다. $\cos x$의 테일러 급수 전개가 다음과 같다는 것을 고려하면, 얻어진 결과는 $\cos x$의 테일러 급수 전개의 처음 세 항에 해당한다는 것을 알 수 있다.

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots$$

이제 지수함수와 로그함수의 경우를 살펴보자. 고등학교 교과서에서는

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

라고 정의하고 있다. 이를 바탕으로 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$임을 증명하고, 이를 이용하여 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$이 성립함을 유도하는 방식으로 내용을 기술하고 있다.

먼저 지수함수 $y=e^x$의 근사항을 이차항까지 확장하자.

정리 4. 다음을 증명하시오.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

증명. $x=2t$로 치환하자. $x\to 0$이면 $t\to 0$이다. 구하는 극한값을 l이라 하면

$$\begin{aligned}l=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}&=\lim_{t\to 0}\frac{e^{2t}-1-2t}{4t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{(e^t-1)(e^t+1)-2t}{4t^2}\\&=\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{(e^t-1-t)(e^t+1)+t(e^t+1)-2t}{t^2}\\&=\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{(e^t-1-t)(e^t+1)+t(e^t-1)}{t^2}\end{aligned}$$

이고 $l = \frac{1}{4}(2l+1)$이다. 이로부터 $l = \frac{1}{2}$을 얻는다. □

얻어진 극한값 $\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$을 살펴보자. 이 등식에서 x^2, 1, x를 이항하면, $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$과 같이 쓸 수 있다. e^x의 테일러 급수 전개가 다음과 같다는 것을 고려하면, 얻어진 결과는 e^x의 테일러 급수 전개의 처음 세 항에 해당한다는 것을 알 수 있다.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

이제 로그함수의 경우를 살펴보자.

정리 5. 다음을 증명하시오.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

증명. $x = 2t$로 치환하자. $x \to 0$이면 $t \to 0$이다. 구하는 극한값을 l이라 하면

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+2t) - 2t}{4t^2} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{t \to 0} \frac{2(\ln(1+t) - t) - (2\ln(1+t) - \ln(1+2t))}{t^2} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{t \to 0} \left(\frac{2(\ln(1+t) - t)}{t^2} - \frac{\ln\left(\frac{(1+t)^2}{1+2t}\right)}{t^2} \right) \end{aligned}$$

이다. 그런데

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{\ln\left(\frac{(1+t)^2}{1+2t}\right)}{t^2} &= \lim_{t \to 0} \ln \left(\frac{1+2t+t^2}{1+2t} \right)^{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \to 0} \ln \left(1 + \frac{t^2}{1+2t} \right)^{\frac{1}{t^2}} \\ &= \lim_{t \to 0} \ln \left(1 + \frac{t^2}{1+2t} \right)^{\frac{1+2t}{t^2} \cdot \frac{1}{1+2t}} = 1 \end{aligned}$$

이므로 $l = \frac{1}{4}(2l - 1)$을 얻는다. 이로부터 $l = -\frac{1}{2}$를 얻을 수 있다. □

얻어진 극한값 $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$을 살펴보자. 이 등식에서 x^2, x를 이항하면, $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$과 같이 쓸 수 있다. $\ln(1+x)$의 테일러 급수 전개가 다음과 같다는 것을 고려하면, 얻어진 결과는 $\ln(1+x)$의 테일러 급수 전개의 처음 두 항에 해당한다는 것을 알 수 있다.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

이제 지금까지 다루었던 함수들의 근사들을 한 항씩 늘려보자. 계산이 상당히 복잡해지지만 여러 흥미로운 현상이 발견되므로 논의해볼 가치가 충분히 있다.

정리 6. 다음이 성립함을 보이시오.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{3!}}{x^5} = \frac{1}{5!}$$

증명. $x = 2t$로 치환하자. $x \to 0$이면 $t \to 0$이다. 구하는 극한값을 l이라 하면

$$\begin{aligned}
l &= \lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t - 2t + \frac{8}{3!}t^3}{32t^5} = \frac{1}{32}\lim_{t\to 0}\frac{2\sin t\cos t - 2t + \frac{8}{3!}t^3}{t^5} \\
&= \frac{1}{16}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t\cos t - t + \frac{4}{3!}t^3}{t^5} \\
&= \frac{1}{16}\lim_{t\to 0}\frac{(\sin t - t + \frac{1}{3!}t^3) + (\frac{1}{2!}t^3 + \sin t\cos t - \sin t)}{t^5}
\end{aligned}$$

이다. 그런데

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2!}t^3 + \sin t\cos t - \sin t}{t^5} &= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{t^3 - 2\sin t + 2\sin t\cos t}{t^5} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{t^2(t-\sin t) + t^2\sin t - 2\sin t + 2\sin t\cos t}{t^5}
\end{aligned}$$

이고,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin t - 2\sin t + 2\sin t\cos t}{t^5} &= \lim_{t\to 0}\frac{\sin t(t^2 + 2\cos t - 2)}{t^5} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\times\frac{t^2 - 4\sin^2\frac{t}{2}}{t^4}.
\end{aligned}$$

이다. 한편 $\lim_{t\to 0}\frac{t^2 - 4\sin^2\frac{t}{2}}{t^4}$에서 $t = 2s$라 하면, 다음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{t^2 - 4\sin^2\frac{t}{2}}{t^4} &= \lim_{s\to 0}\frac{4s^2 - 4\sin^2 s}{16s^4} = \frac{1}{4}\lim_{s\to 0}\frac{s^2 - \sin^2 s}{s^4} \\
&= \frac{1}{4}\lim_{s\to 0}\frac{(s-\sin s)(s+\sin s)}{s^4} \\
&= \frac{1}{4}\lim_{s\to 0}\left(\frac{s-\sin s}{s^3}\cdot\frac{s+\sin s}{s}\right)
\end{aligned}$$

정리 1에서 증명한 $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{3!}$을 이용하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{4}\lim_{s\to 0}\left(\frac{s-\sin s}{s^3}\cdot\frac{s+\sin s}{s}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\cdot 2\right) = \frac{1}{12}$$

이로부터, l에 대한 다음 등식을 얻을 알 수 있다.

$$l = \frac{1}{16}\left(l + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)\right)$$

얻어진 l에 대한 일차방정식을 풀면, $l = \dfrac{1}{120} = \dfrac{1}{5!}$이 된다. □

증명한 극한 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + \frac{x^3}{3!}}{x^5} = \frac{1}{5!}$에서 x^5, x, $\dfrac{x^3}{3!}$을 이항하면, $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$을 얻을 수 있다. 이것은 $\sin x$의 테일러 급수 전개의 처음 세 항에 해당한다.

코사인 함수는 이미 세번째 항까지 근사하였으므로 탄젠트 함수의 근사 항을 확장시켜보자.

정리 7. 다음을 증명하시오.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x - \frac{1}{3}x^3}{x^5} = \frac{2}{15}$$

증명. $x = 2t$로 치환하자. $x \to 0$이면 $t \to 0$이다. 구하는 극한값을 l이라 하고 탄젠트 함수의 2배각 공식을 적용하면

$$\begin{aligned}
l &= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x - \frac{1}{3}x^3}{x^5} = \lim_{t\to 0}\frac{\tan 2t - 2t - \frac{8}{3}t^3}{32t^5} \\
&= \frac{1}{16}\lim_{x\to 0}\frac{\tan t - t + t\tan^2 t - \frac{4}{3}t^3(1-\tan^2 t)}{t^5(1-\tan^2 t)} \\
&= \frac{1}{16}\lim_{t\to 0}\frac{(\tan t - t - \frac{1}{3}t^3) + t\tan^2 t - t^3 + \frac{4}{3}t^3\tan^2 t}{t^5(1-\tan^2 t)} \\
&= \frac{1}{16}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\tan t - t - \frac{1}{3}t^3}{t^5} + \frac{\tan^2 t - t^2}{t^4} + \frac{\frac{4}{3}\tan^2 t}{t^2}\right) \times \frac{1}{1-\tan^2 t} \\
&= \frac{1}{16}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\tan t - t - \frac{1}{3}t^3}{t^5} + \frac{\tan t - t}{t^3}\cdot\frac{\tan t + t}{t} + \frac{4}{3}\cdot\frac{\tan^2 t}{t^2}\right)\cdot\frac{1}{1-\tan^2 t}
\end{aligned}$$

이고, 이로부터 $l = \dfrac{1}{16}\left(l + \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3}\right)$을 얻고 $l = \dfrac{2}{15}$이다. □

이제 지수함수의 근사 항을 확장시키자.

정리 8. 다음을 증명하시오.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!}}{x^3} = \frac{1}{3!}$$

증명. $x = 2t$로 치환하자. $x \to 0$이면 $t \to 0$이다. 구하는 극한값을 l이라 하면

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{2t} - 1 - 2t - 2t^2}{8t^3} \\ &= \frac{1}{8} \lim_{t\to 0} \frac{(e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2}) + (e^{2t} - e^t - t - \frac{3}{2}t^2)}{t^3} \end{aligned}$$

이다. 그런데

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0} \frac{e^{2t} - e^t - t - \frac{3}{2}t^2}{t^3} \\ &\qquad = \lim_{t\to 0} \frac{(e^t - 1)(e^t - 1 - t) + \left(te^t + e^t - 1 - 2t - \frac{3}{2}t^2\right)}{t^3} \end{aligned}$$

이고

$$\lim_{t\to 0} \frac{te^t + e^t - 1 - 2t - \frac{3}{2}t^2}{t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{\left(e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2!}\right) + \left(te^t - t - t^2\right)}{t^3}$$

이다. 마지막으로, 정리 4에서 증명한 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$을 이용하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\lim_{t\to 0} \frac{te^t - t - t^2}{t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} = \frac{1}{2}$$

이다. 앞의 정리들의 결과와 위의 논의를 종합하면

$$l = \frac{1}{8}\left(l + \left(\frac{1}{2} + l + \frac{1}{2}\right)\right)$$

이고 $8l = 2l + 1$에서 $l = \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3!}$이다. □

마지막으로 자연로그 함수의 근사항을 확장시켜보자.

정리 9. 다음을 증명하시오.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{3}$$

증명. $x = 2t$로 치환하자. $x \to 0$이면 $t \to 0$이다. 구하는 극한값을 l이라 하면

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+2t) - 2t + 2t^2}{8t^3} \\ &= \frac{1}{8} \lim_{t\to 0} \frac{2\left(\ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2}\right) - \left(2\ln(1+t) - \ln(1+2t) - t^2\right)}{t^3} \end{aligned}$$

이다. 그런데

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\left(2\ln(1+t)-\ln(1+2t)-t^2\right)\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\left(\ln(1+t)^2-\ln(1+2t)-\ln(e^{t^2})\right)=\lim_{t\to 0}\ln\left(\frac{(1+t)^2}{(1+2t)e^{t^2}}\right)^{\frac{1}{t^3}}\\
&=\lim_{t\to 0}\ln\left(1+\left(\frac{(1+t)^2}{(1+2t)e^{t^2}}-1\right)\right)^{\frac{1}{\left(\frac{(1+t)^2}{(1+2t)e^{t^2}}-1\right)}\cdot\frac{\left(\frac{(1+t)^2}{(1+2t)e^{t^2}}-1\right)}{t^3}}
\end{aligned}$$

이고

$$\lim_{t\to 0}\left(1+\left(\frac{(1+t)^2}{(1+2t)e^{t^2}}-1\right)\right)^{\frac{1}{\left(\frac{(1+t)^2}{(1+2t)e^{t^2}}-1\right)}}=e$$

이므로 $t\to 0$일 때 $\dfrac{\left(\frac{(1+t)^2}{(1+2t)e^{t^2}}-1\right)}{t^3}$의 극한값을 구하면 모든 계산이 끝난다. 이제

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{(1+t)^2}{(1+2t)e^{t^2}}-1\right)}{t^3}&=-\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{e^{t^2}}\left(e^{t^2}-\frac{(1+t)^2}{1+2t}\right)}{t^3}=-\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{e^{t^2}}\left(e^{t^2}-\frac{1+2t+t^2}{1+2t}\right)}{t^3}\\
&=-\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{e^{t^2}}(e^{t^2}-1-\frac{t^2}{1+2t})}{t^3}=-\lim_{t\to 0}\frac{(e^{t^2}-1)-\frac{t^2}{1+2t}}{t^3}\cdot\frac{1}{e^{t^2}}\\
&=-\lim_{t\to 0}\frac{\left(e^{t^2}-1\right)(1+2t)-t^2}{t^3}\cdot\frac{1}{(1+2t)e^{t^2}}\\
&=-\lim_{t\to 0}\frac{2t(e^{t^2}-1)+(e^{t^2}-1-t^2)}{t^3}\cdot\frac{1}{(1+2t)e^{t^2}}
\end{aligned}$$

이다. 그런데 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{2t(e^{t^2}-1)}{t^3}=2$이고 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{e^{t^2}-1-t^2}{t^4}=\frac{1}{2}$이 성립한다. 그러므로 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{e^{t^2}-1-t^2}{t^3}=0$이다. 이상을 정리하면, 다음과 같은 식을 얻고 $l=\dfrac{1}{8}(2l+2)$이다. 따라서, $l=\dfrac{1}{3}$이다. 이로부터 $\ln(1+x)\approx x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$을 얻는다. □

지금까지 논의에서 로그함수에서 사용된 대수적 기법에 주목할 필요가 있다. 로그함수를 제외한 함수들의 경우에는 x를 $2t$로 치환하여 2배각 공식을 이용하거나 지수가 거듭제곱이 되어 인수분해를 할 수 있게 하였는데 반해 로그함수는 이러한 방법이 불가능하여 원래 구해야할 극한 l의 상수배 형태의 식이 나타나도록 적절한 항을 더해주고 빼주는 방법을 사용하였다. 이러한 대수적 방법은 무리함수의 극한 문제에서도 적용할 수 있는가 확인해 보는 것은 의미가 있다. 다음의 정리는 이러한 의문에 유의미한 답변을 준다.

정리 10. 다음을 증명하시오.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{1}{2}x}{x^2}=-\frac{1}{8}$$

증명. $x=2t$로 치환하자. $x\to 0$이면 $t\to 0$이다. 구하는 극한값을 l이라 하면

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{1}{2}x}{x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+2t}-1-t}{4t^2} \\ &= \frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{(\sqrt{1+t}-1-\frac{1}{2}t)-(\sqrt{1+t}-\sqrt{1+2t}+\frac{1}{2}t)}{t^2} \end{aligned}$$

이다. 그런데

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1+2t}+\frac{1}{2}t}{t^2} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{(\sqrt{1+t}-\sqrt{1+2t}+\frac{1}{2}t)(\sqrt{1+t}+\sqrt{1+2t}-\frac{1}{2}t)}{t^2(\sqrt{1+t}+\sqrt{1+2t}-\frac{1}{2}t)} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{t\sqrt{1+2t}-t-\frac{1}{4}t^2}{t^2(\sqrt{1+t}+\sqrt{1+2t}-\frac{1}{2}t)} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+2t}-1-\frac{1}{4}t}{t}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1+2t}-\frac{1}{2}t} \\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+2t}-1}{t}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1+2t}-\frac{1}{2}t} \\ &= \left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8} \end{aligned}$$

이다. 이상을 정리하면 $l=\frac{1}{4}\left(l-\frac{3}{8}\right)$이다. 따라서 $l=-\frac{1}{8}$이다. 이로부터

$$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$$

을 얻는다. □

지금까지 우리는 $x=2t$로 치환하고 삼각함수의 2배각 공식과 여러 대수적 등식을 활용하여 계산해야할 극한값을 l이라 하였을 때 l에 대한 일차방정식 형태의 식을 얻음으로써 l을 구하고 이 결과를 이용하여 삼각함수와 지수함수, 로그함수 그리고 무리함수의 근사 공식의 항을 확장 할 수 있음을 정당화 하였다. 이 과정을 면밀히 살펴보면, 삼각함수의 확장된 극한값의 계산에서는 배각공식을 활용하여 계산하는 반면, 지수함수, 로그함수, 무리함수의 극한값의 계산에서는 인수분해 또는 유리화와 같은 대수적 계산이 활용된다는 점이다. 또한 근사 공식의 항을 확장할 때 이전 확장에서의 식이 다음 확장에서 다시 나타나고 있다는 것을 확인할 수 있었다. 즉 이 방법에 의한 근사 공식의 계산은 재귀적인 성격을 갖는 다는 것을 알 수 있다. 마지막으로 이러한 확장

과정에서 다양한 부수적인 함수의 극한 문제가 대두 된다는 점이다. 이러한 사실은 이와 같은 확장의 활동이 수학적인 의미를 갖는 것 뿐만 아니라 새로운 극한 문제들을 생성한다는 의미 또한 갖는다는 것을 함의한다. 결국 이러한 근사공식의 항의 확장은 학술적 가치 뿐만 아니라 학생들의 다양한 문제해결 능력을 키워줄 수 있으며 평가영역의 확대 효과 또한 갖는다고 할 수 있다.

한편 고등학교 수학에서 극한값을 계산하는 데 있어서 사용되는 대수적 방법은 통분, 분모 또는 분자의 유리화, 인수분해 정도에 불과하다. 그런데 본 연구에서 극한 변수를 치환하는 것 또한 매우 강력한 문제해결 전략이 될 수 있음을 확인할 수 있었다. 또한 무리함수와 같은 다른 함수에서도 이 전략을 적용할 수도 있음을 확인하였다. 마지막으로 이러한 대수적 방법과 수학적 귀납법, 그리고 이 논문에서 언급하지 않은 더 강력한 어떤 대수적 방법만을 활용하여 미분을 활용하지 않고 극한값을 계산하는 것만으로 여러 함수들의 급수 전개를 할 수 있는 방법이 보다 훌륭한 연구자들로부터 발견되기를 기대하면서 글을 마친다.

References

1. Ah Khloy A. (Retrieved May 3, 2025, from URL). *limit x to 0 of (x-sinx)/x^3.* https://www.youtube.com/watch?v=rQyVVUthpL8
2. Han, I., & Kombarov A. (2004). The Role and Instruction of Geometry in Gifted Mathematics Education. *Communications of mathematical education, 18*(2), 265-276.
3. Han, I. (2020). *Learning Mathematical Expressions, Understanding Mathematics.* Kyowoosa.
4. Hwang, S., Kang, B., Yoon, G., Lee, G., Kim, S., Lee, M., Kim, W., Park, M., & Park, S. (2019). *High School Calculus.* MiraeN Publishing.
5. Kim, S., Noh, J., Ma, M., Seo, B., Son, H., Shin, D., Shin, B., Lee, K., Lee, K., Lee, B., Lim, H., & Han, I. (2024). *Introduction to Mathematics Education.* Kyungmoonsa.
6. Ko, S., Lee, J., Lee, S., Cha, S., Kim, E., & Cho, S. (2019). *High School Calculus.* Joeunchaek-Sinsago.
7. Lyou, I., Han, I. (2011). A Study on Problem Solving Related with Geometric Interpretation of Algebraic Expressions. *Communications of mathematical education, 25*(2), 451-472.
8. Lyou, I. (2010). *A Study on the Analysis and Application of Problem Information in the Process of Mathematical Problem Solving* [Unpublished doctorial dissertation, Gyeongsang National University].
9. Prime Newtons (Retrieved May 3, 2025, from URL). *Limit (x-sin x)/x^3 as x goes to 0.* https://www.youtube.com/watch?v=tvlBm_BwmtE

10. Mathematics Textbook Compilation Committee. (2005). *College mathematics.* Kyungmoonsa.
11. Shin, H., Han, I., Choi, E., Lee, K., & Lew, M. (2001). Revisiting Korea's Seventh Mathematics Curriculum: Insights from International Educational Practices. *Communications of Mathematical Education, 11*, 291 – 296.

[a]Ikseung Lyou, Teacher, Yanghyeon Highschool:
Email address: `infgrp@hanmail.net`