J. Korean Soc. Math. Edu. Ser. B: Theoretical Math. Pedagogical Math.
https://doi.org/10.7468/jksmeb.2025.32.2.153 ISSN(Print) 3059-0604
Volume 32, Number 2 (May 2025), Pages 153–169 ISSN(Online) 3059-1309

$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$의 일관된 귀납적 정당화 방법의 탐색과 그 확장에 대한 연구

A STUDY ON THE CONSISTENT INDUCTIVE JUSTIFICATION AND EXTENSION OF $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$

조현주 [a] AND 서보억 [b,*]

ABSTRACT. This paper investigates a part of the Faulhaber formula studied in the ⟨Algebra⟩ curriculum. Specifically, it examines the formula for $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$. Based on textbook analysis, this study attempts to derive a general method of inductive justification for the formula when $\alpha = 1, 2, 3)$, and further extends it to the cases where $\alpha = 4, 5$. First, through an analysis of previous research, two consistent methods of inductive justification were identified. One is the 'geometric rotational symmetry' method, and the other uses ratios. Second, using these two methods, the formula for $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$ was inductively derived for $\alpha = 4, 5$.

1. 서론

Faulhaber의 공식([14], [16])이라고 불리는 $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} = \frac{1}{\alpha+1}\sum_{r=0}^{\alpha} {}_{\alpha+1}\mathrm{C}_r B_r n^{\alpha+1-r}$ (단, B_r은 베르누이 수)은 우리나라 학교 수학에서 부분적으로 다루고 있는 내용이다. [3]의 고등학교 선택 중심 교육과정에서 일반 선택 과목 중에 ⟨대수⟩가 있는데, ⟨대수⟩ 과목의 내용 요소 중 '수열의 합'에서 $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$을 다루고 있다. 수열의 합은 3차 수학과 교육과정 이래로 중요한 내용 요소로 자리매김하고 있다([10]).

수열의 합은 중단원 내용 요소인데, 이 중단원에 해당하는 성취기준으로 '여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하는 방법을 설명할 수 있다.'가 있다. 이 성취기준에 대한 해설을 보면, '여러 가지 수열의 합에서는 자연수의 거듭제곱의 합 $\sum_{k=1}^{n} k$,

Received by the editors April 12, 2025. Revised May 6, 2025. Accepted May 19, 2025.
2020 *Mathematics Subject Classification.* 97I30.
Key words and phrases. sums of powers, Faulhaber's formula, geometric symmetry, algebraic proportion
주요어:연속된 자연수의 합, Faulhaber의 공식, 기하적 대칭, 대수적 비율
*Corresponding author.

$\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$과 수열의 합이 간단한 것만 다룬다.'([3])라고 제시한 것으로 볼 때, $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$을 중심으로 학습이 이루어진다는 사실을 짐작할 수 있다.

이 성취기준이 구현된 2015 개정 수학과 교육과정의 교과서의 내용을 보면, 수학적인 의문이 생기게 된다. 이러한 의문은, 2015 개정 수학과 교육과정에 제시된 내용인, '학생들의 추론 능력을 함양하기 위해 관찰과 탐구 상황에서 귀납, 유추의 개연적 추론을 사용하여 학생 스스로 수학적 사실을 추측하고 적절한 근거에 기초하여 이를 정당화할 수 있게 한다([2]).'와 관련이 있다.

실제로 현행 교과서에서는 자연수의 거듭제곱의 합 $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$과 관련하여 학생 스스로 추측할 수 있는 수학적 상황을 제시하기보다 추상화된 수학 개념을 형식적으로 증명함으로써 논리적 엄밀성을 강조하고 있다.

또한, 현행 2015 개정에 따른 수학 교과서의 수열 단원에서는 $\sum_{k=1}^{n} k$의 공식은 등차수열의 합을 이용하여 지도하며, $\sum_{k=1}^{n} k^2$의 공식 및 $\sum_{k=1}^{n} k^3$의 공식은 항등식을 이용한 엄밀한 증명 방법을 택하고 있다. 이는 동일한 패턴을 가지는 자연수 거듭제곱의 합 공식을 지도하는 과정에서 서로 상이한 방식으로 공식을 유도하고 있어 일관성 또한 부족한 실정이다. 이처럼 동일한 패턴을 가지는 공식에 대한 서로 상이한 접근은 학습에 대한 상호 연결의 부족과 계통성 확보의 어려움이 예상된다. 또한, α의 값을 확장한 새로운 공식을 발견하기 위한 수학적 아이디어를 생각해내기 어려울 것으로 보인다.

이에 본 연구는 자연수의 거듭제곱의 합 $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$ 공식과 관련된 교직수학의 문제점을 해결하기 위한 목적으로 수행되었다. 이러한 목적을 달성하기 위한 연구의 내용은 다음과 같다.

첫째, $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$에 대한 교과서 분석을 바탕으로 α의 값에 무관한 일관성을 지닌 귀납적 정당화 방법을 탐구한다.

둘째, $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$에 대한 귀납적 정당화 방법에 대한 고찰을 바탕으로 유추를 통한 $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ $(\alpha = 4, 5)$공식의 발견 방법을 탐구한다.

2. 연구의 배경

2.1. 수학교과서 및 교재에 나타난 $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$의 정당화 사례

첫째, $\sum_{k=1}^{n} k$의 정당화이다. 하나는 도형을 이용하는 방법이다. 예를 들면, 그림 1과 같이 $1 + \cdots + n$까지의 합을 계단 모양으로 2개를 만든 다음, 이를 연결하여 이웃하는 두 변의 길이가 각각 n, $n+1$인 직사각형을 통해 설명하고 있다([4], [12]).

다른 하나는 등차수열의 합 공식을 이용하는데, Gauss가 하였던 '$1, 2, 3, \cdots, n$'과 '$n, n-1, \cdots, 1$'의 순차적 배열의 합을 통해 설명하고 있다. 마지막은 수학적 귀납법을 이용하는 것이다([1], [7]).

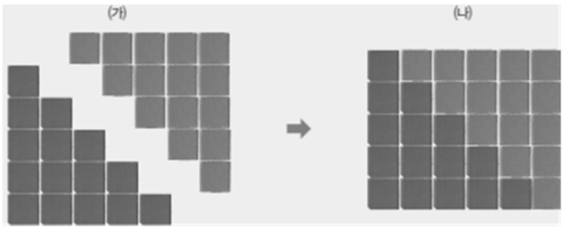


그림 1. $\sum_{k=1}^{n} k$의 설명 [13]

둘째, $\sum_{k=1}^{n} k^2$의 정당화이다. 하나는 대수식 $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$인 관계를 이용하여 설명하고 있다([5], [9]).

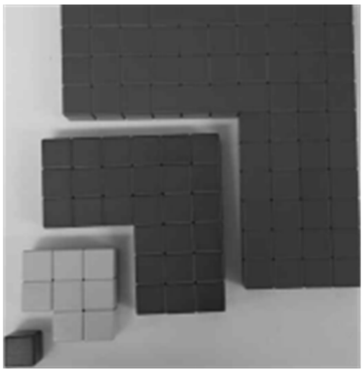


그림 2. $\sum_{k=1}^{n} k^3$의 설명 [11]

다른 하나는 $k = 1, 2, 3, \cdots, n$일 때 $\sum_{k=1}^{n} k^2 \div \sum_{k=1}^{n} k$의 규칙을 통해 설명하고 있다([15]). 또 다른 하나는 층마다 $1^2, 2^2, \cdots, n^2$개의 작은 정육면체를 쌓은 입체도형을 이용하여 설명하고 있다([8]). 마지막은 수학적 귀납법을 이용하는 것이다([1], [7]).

셋째, $\sum_{k=1}^{n} k^3$의 정당화이다. 하나는 도형을 이용하여, 그림 2와 같이 $1^3 + \cdots + n^3$까지의 합을 ㄱ모양으로 연속적으로 연결하여 큰 정사각형을 만들어 $\sum_{k=1}^{n} k$과 연계하여 설명하고 있다([11], [12]). 다른 하나는 대수식 $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$인 관계를 이용하여 설명하고 있다([9], [13]). 마지막은 수학적 귀납법을 이용하는 것이다([1], [6]).

2.2. $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$ $(\alpha = 4, 5)$의 확장 및 정당화

첫째, $L_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $P_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$을 이용하여 확장과 더불어 이를 정당화할 수 있다([9]). 구체적으로 먼저, $L_n^2 – L_{n-1}^2 = n^3$이므로 $n = 2, 3, 4, \cdots$을 대입하여 변끼리 더하면, $L_n^2 = 1^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = S_n$을 유도할 수 있다.

다음으로, $L_n^2 + L_{n-1}^2 = \dfrac{n^2(n^2+1)}{2}$인데, 정리하면 $(2n+1)L_n^2 - (2n-1)L_{n-1}^2 = \dfrac{5n^4+n^2}{2}$이므로, $n = 2, 3, 4, \cdots$을 대입하여 변끼리 더하여 정리하면, $H_n = \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n–1)$을 유도할 수 있다. 마지막으로 $L_n^3 – L_{n-1}^3 = \dfrac{3n^5+n^3}{4}$이므로, $n = 2, 3, 4, \cdots$를 대입하여 변끼리 더하여 정리하면, $F_n = \sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n–1)$을 유도할 수 있다([9]).

2.3. 연구의 방향

현재 교과서 및 교재에 제시된 방법은 두 가지 측면에서 수학 교수학적 개선의 여지가 필요하다. 첫째, $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$에 관한 정당화는 증명 과정에 충실하여, 그 과정이 복잡하게 표현되어져 있다([6]). 특히, 교과서 및 문헌 분석 결과 $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$의 정당화에서 일관된 방식으로 정당화를 시도한 것은 수학적 귀납법에 의한 연역적 증명뿐이다. 그런데, 수학적 귀납법에 의한 증명은 우변의 계산에 몰두하다 보면 무엇을 증명하는지조차 모르는 오류를 범할 우려가 있다. 또한, 수학적 귀납법은 연역적

엄밀성을 기반으로 하는 정당화 방법이므로, 증명 과정 자체를 직관적으로 이해하기가 어려운 부분이 있다([6]).

둘째, $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$은 형식적으로 유사성을 지니고 있음에도 불구하고, 정당화 방법에는 일관성이 없다. $\sum_{k=1}^{n} k$의 정당화는 등차수열의 n항까지의 합을 바로 도입하여 쉽게 설명하고 있지만, $\sum_{k=1}^{n} k^2$의 정당화에서는 이와 전혀 다르게 설명하고 있어서 유사한 공식의 정당화 방법에 상호 관련성이 없어 학생들에게 혼란을 불러올 수 있다([6]).

셋째, 새로운 지식의 확장은 귀납과 같은 개연적 추론이다([15]). 그런데, $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$의 정당화에 관한 일관성 있는 귀납적 정당화 방법이 없어 자연스러운 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$ $(\alpha = 4, 5)$ 공식의 확장이 제한적이다.

이에 본 연구는 $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$에 관한 일관성 있는 귀납적 정당화 방법을 탐구하고, 이러한 귀납적 방법을 통해 $\sum_{k=1}^{n} k^4$, $\sum_{k=1}^{n} k^5$의 공식을 발견하는 방법에 대해 고찰하고자 한다.

3. 연구 결과 및 결론

3.1. $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$에 관한 일관성 있는 귀납적 정당화 방법

본 연구에서는 두 가지 방법으로 귀납적 정당화 방법에 대해 고찰한다. 첫째는 Gauss가 어린 시절 $1 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$을 구하였던 방법을 1차원에서의 기하적 회전대칭으로 해석하고, 이를 이용하여 $\sum_{k=1}^{n} k^2$과 $\sum_{k=1}^{n} k^3$ 공식을 2차원과 3차원에서의 기하적 회전대칭으로 탐색한다. 둘째는 Polya가 [15]에서 개연추론으로 제시한 $1^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$을 $\sum_{k=1}^{n} k^2$과 $\sum_{k=1}^{n} k$의 비율로 해석하고, 이를 이용하여 $\sum_{k=1}^{n} k$과 $\sum_{k=1}^{n} k^3$ 공식을 비율로 탐색한다.

(1) 귀납적 정당화[1] : 기하적 회전대칭을 이용한 귀납적 정당화

[출발점] $\sum_{k=1}^{n} k$ **: 직선의 회전대칭**

기하적 회전대칭을 이용한 일관성 있는 $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$의 귀납적 정당화 방법을 탐색하기 위해 출발점은 $\sum_{k=1}^{n} k$이다. $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$에서 $\alpha = 1$일 때이다. Gauss는 $1, 2, 3, \cdots, (n-1), n$의 순서로 배치(아래의 ⓐ)하여 더한 합은 이를 역순으로 배치(아래의 ⓑ)하여 더한 합과 동일하다는 것을 이용하였다.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrl}
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 100 & \cdots ⓐ \\
+) & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \cdots & + & 1 & \cdots ⓑ \\
\hline
 & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 &
\end{array}$$

그런데, Gauss의 이 방법은 $\alpha = 1$일 때, ⓐ$'$의 경우 1차원인 직선 위에 수를 순차적으로 나열한 것으로 해석할 수 있다. 이 해석으로 보면, ⓑ$'$는 역순으로 나열한 것이 아니라, ⓐ$'$를 180° 회전대칭시킨 것이다. 따라서, $\sum_{k=1}^{n} k$의 공식은 [그림 3]과 같이 1차원인 직선을 180° 회전대칭을 통해서 $2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)$을 얻었고, 이를 통해 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$임을 유추할 수 있다.

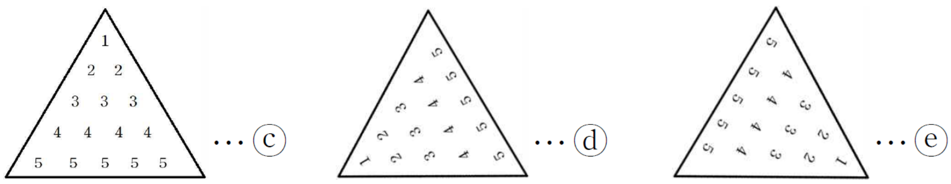
	1	2	3	$\cdots$	$(n-2)$	$(n-1)$	n	$\cdots$ ⓐ$'$
$+$	n	$(n-1)$	$(n-2)$	$\cdots$	3	2	1	$\cdots$ ⓑ$'$
$=$	$(n+1)$	$(n+1)$	$(n+1)$	$\cdots$	$(n+1)$	$(n+1)$	$(n+1)$	$= n(n+1)$

그림 3. 회전대칭을 이용한 $\sum_{k=1}^{n} k$의 귀납적 정당화

[$\sum_{k=1}^{n} k^2$**의 탐색**] **: 평면 삼각형의 회전대칭**

1차원 직선에서 기하적 회전대칭을 이용하여 $\sum_{k=1}^{n} k$를 귀납적으로 정당화할 수 있었다. 유사한 방법으로 $\sum_{k=1}^{n} k^2$의 귀납적 정당화의 새로운 방법을 탐색하여 보자. $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$에서 $\alpha = 2$일 때이다. $\alpha = 1$일 때, 1차원 직선으로 해석하였기에 $\alpha = 2$일 때는 2차원으로 해석할 수 있다. 2차원 공간에서 가장 간단한 도형은 삼각형이다. 따라서 ⓐ$'$과 유사한 방법으로 연속한 자연수를 정삼각형에 배치하여 보자. 그러면, ⓒ와 같은 배치를 얻을 수 있다. 이 그림에서 삼각형 내부의 수의 합은 $1\times1+2\times2+\cdots+5\times5 = \sum_{k=1}^{5} k^2$

이다. 따라서, ⓒ+ⓓ+ⓔ를 통해, $3\times(1^2+2^2+\cdots+5^2)=(2\times5+1)(1+2+\cdots+5)$를 얻고, $1^2+2^2+\cdots+5^2=\dfrac{5(5+1)(2\times5+1)}{6}$이다.



1차원 직선에서는 ⓐ′을 180° 회전대칭시켜 ⓑ′을 얻었지만, 2차원 평면도형인 삼각형에서는 120°씩 각각 회전대칭하여 1차원과 유사한 상황을 유추할 수 있다. 즉, ⓒ를 일반화한 ⓒ′으로부터 ⓓ′과 ⓔ′을 얻을 수 있다. 이제 [그림 3]과 동일한 방법으로 동일한 위치에 있는 수들을 모두 더해 보자. [그림 4]와 같이 2차원 평면 위의 삼각형의 120° 회전대칭을 통해서 세 삼각형에 적힌 수의 합은 $3\sum_{k=1}^{n}k^2=(2n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}$이므로, $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$을 발견할 수 있다.

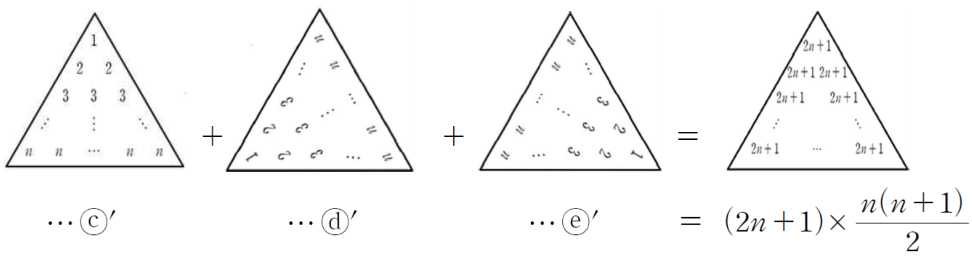
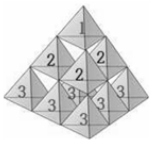
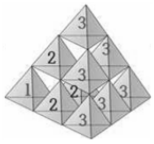


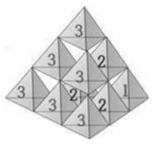
그림 4. 회전대칭을 이용한 $\sum_{k=1}^{n}k^2$의 귀납적 정당화

[$\sum_{k=1}^{n}k^3$의 탐색] : 공간 사면체의 회전대칭

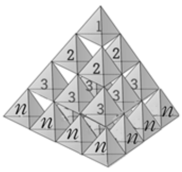
앞에서 $\sum_{k=1}^{n}k$은 1차원 직선에서 기하적 회전대칭을, $\sum_{k=1}^{n}k^2$은 2차원 평면 삼각형에서 기하적 회전대칭을 이용하여 귀납적 정당화를 할 수 있었다. 이 사실을 바탕으로 유추를 통해 $\sum_{k=1}^{n}k^3$의 귀납적 정당화의 새로운 방법을 탐색하여 보자. $\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha}$에서 $\alpha=3$일 때이다. $\alpha=1$ 및 $\alpha=2$일 때 1차원 직선과 2차원 삼각형으로 해석하였기에, $\alpha=3$일 때는 3차원으로 해석할 수 있다. 3차원 공간에서 가장 간단한 도형은

사면체이다. 따라서 ⓒ와 유사한 방법으로 연속한 자연수를 정사면체에 배치하여 보자. 그러면, ⓕ와 같은 배치를 얻을 수 있다. 이 그림에서 정사면체 내부의 수의 합은 $1\times1+2\times(1+2)+3\times(1+2+3)$이다. 따라서, ⓕ + ⓖ + ⓗ + ⓘ를 통해, $4\times\{1\times1+2\times(1+2)+3\times(1+2+3)\}=(3\times3+1)\times\{(1)+(1+2)+(1+2+3)\}$을 얻을 수 있고, 이는 곧 $4\times\sum_{k=1}^{3}k\times\frac{k(k+1)}{2}=(3\cdot3+1)\times\sum_{k=1}^{3}\frac{k(k+1)}{2}$이다.

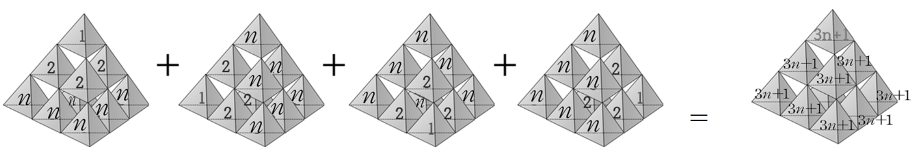

…ⓕ

…ⓖ

…ⓗ

…ⓘ

따라서 이를 일반화하면 ⓙ와 같은 배치를 얻을 수 있다. 이 그림에서 정사면체 내부에 있는 모든 수의 합은 $1\times1+2\times3+3\times6+\cdots+n\times\dfrac{n(n+1)}{2}=\sum_{k=1}^{n}\left\{k\times\frac{k(k+1)}{2}\right\}$이다.


…ⓙ

2차원 삼각형에서는 ⓒ$'$를 두 번 회전하여 ⓓ$'$과 ⓔ$'$을 얻었지만, 정사면체에서는 총 세 번 회전하는 상황으로 유추할 수 있다. 즉, ⓙ을 $1,2,\cdots,n$으로 단순화한 ⓕ$'$으로부터 세 번 회전하여 ⓖ$'$, ⓗ$'$, ⓘ$'$을 얻을 수 있다. 이제 [그림 4]와 동일한 방법으로 동일한 위치에 있는 수들을 모두 더하면, [그림 5]와 같은 상황을 얻을 수 있다.



…ⓕ$'$ …ⓖ$'$ …ⓗ$'$ …ⓘ$'$ $=(3n+1)\times\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k(k+1)}{2}$

그림 5. 회전대칭을 이용한 $\sum_{k=1}^{n}k^3$의 귀납적 정당화

이제 이 값이 어떻게 되는지 확인해 보자. 좌변의 값은 $4 \times \sum_{k=1}^{n} \left\{ k \times \frac{k(k+1)}{2} \right\}$이고, 우변의 값은 $(3n+1) \times \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2}$이므로 이를 통해 아래 등식을 세울 수 있다.

$$4 \times \sum_{k=1}^{n} \left\{ k \times \frac{k(k+1)}{2} \right\} = (3n+1) \times \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2}$$

이 식을 계산하면, $\sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{3n+1}{4} \times \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k \right)$이다. 이제 식을 정리하여 계산하면,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{3(n-1)}{4} \times \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3n+1}{4} \times \sum_{k=1}^{n} k$$

이다. 이 식을 순차적으로 계산하면,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{3(n-1)}{4} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n+1}{4} \times \frac{n(n+1)}{2} \\
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{n(n+1)(n-1)(2n+1)}{8} + \frac{(3n+1)n(n+1)}{8} \\
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{n(n+1)(2n^2+2n)}{8} = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2
\end{aligned}$$

이므로, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$이다.

결론적으로 $\sum_{k=1}^{n} k$은 1차원 선분의 회전대칭으로 정당화할 수 있었고, $\sum_{k=1}^{n} k^2$은 2차원 평면인 정삼각형의 회전대칭으로 정당화할 수 있었으며, $\sum_{k=1}^{n} k^3$은 3차원 공간에서 정사면체의 회전대칭으로 정당화할 수 있었다. 따라서, $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$ $(\alpha = 4, 5)$의 형태도 α 차원에서의 회전대칭으로 나타낼 수 있을 것이라 유추할 수 있다.

(2) 귀납적 정당화[2] : 비율을 이용한 귀납적 정당화

[출발점] $\sum_{k=1}^{n} k^2$과 $\sum_{k=1}^{n} k$의 비율에 의한 $\sum_{k=1}^{n} k^2$의 발견

두 α, β에 의한 $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$와 $\sum_{k=1}^{n} k^{\beta}$의 비율을 이용한 일관성 있는 $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$의 귀납적 정당화 방법을 탐색하기 위한 출발점은 Polya의 [15]에 제시된 $\alpha = 2$, $\beta = 1$이다. 표 1과 같이 $\dfrac{P_n}{L_n}$의 값을 구해보자.

여기서, $\dfrac{P_n}{L_n}$의 비율로 $\dfrac{2n+1}{3}$을 유추할 수 있다. 즉, $\dfrac{P_n}{L_n} = \dfrac{2n+1}{3}$이므로, $P_n = L_n \times \dfrac{2n+1}{3}$으로 표현할 수 있다. 따라서, L_n을 통해 P_n의 값을 발견할 수 있다. $L_n =$

표 1. P_n과 L_n의 비율을 이용한 유추

대상	1	2	3	4	$\cdots$	n
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	1	5	14	30	$\cdots$	P_n
$\sum_{k=1}^{n} k$	1	3	6	10	$\cdots$	L_n
$\frac{P_n}{L_n}$	$\frac{1}{1}=\frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$	$\frac{30}{10}=\frac{9}{3}$	$\cdots$	$\frac{2n+1}{3}$

$\frac{n(n+1)}{2}$이므로, $P_n = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{2n+1}{3}$이다. 따라서, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$을 얻을 수 있다([15]).

[$\sum_{k=1}^{n} k$의 탐색] : $\sum_{k=1}^{n} k$과 $\sum_{k=1}^{n} k^0$의 비율에 의한 $\sum_{k=1}^{n} k$의 발견

이제 $\sum_{k=1}^{n} k^2$과 $\sum_{k=1}^{n} k$의 비율을 이용하여 $\sum_{k=1}^{n} k^2$의 값을 구한 것을 바탕으로, 이와 유사한 방법으로 $\sum_{k=1}^{n} k$의 귀납적 정당화의 새로운 방법을 탐색하여 보자. $\sum_{k=1}^{n} k^2$을 구하기 위해 $\sum_{k=1}^{n} k^2$과 $\sum_{k=1}^{n} k$의 비율을 이용하였기 때문에, $\sum_{k=1}^{n} k$을 구하기 위해서 필요한 것은 $\sum_{k=1}^{n} k$과 $\sum_{k=1}^{n} k^0$의 비율로 해석할 수 있다. 표 2와 같이 $\frac{L_n}{C_n}$의 값을 구해보자. 여기서 $C_n = \sum_{k=1}^{n} k^0$이다.

표 2. L_n과 C_n의 비율을 이용한 유추

대상	1	2	3	4	$\cdots$	n
$\sum_{k=1}^{n} k$	1	3	6	10	$\cdots$	L_n
$\sum_{k=1}^{n} k^0$	1	2	3	4	$\cdots$	C_n
$\frac{L_n}{C_n}$	$\frac{1}{1}=\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{6}=\frac{4}{2}$	$\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$	$\cdots$	$\frac{n+1}{2}$

여기서, $\frac{L_n}{C_n}$의 비율로 $\frac{n+1}{2}$을 유추할 수 있다. 즉, $\frac{L_n}{C_n} = \frac{n+1}{2}$이고 $C_n = n$이므로, $L_n = n \times \frac{n+1}{2}$으로 표현할 수 있다. 따라서, $L_n = \frac{n(n+1)}{2}$이다.

[$\sum_{k=1}^{n} k^3$의 탐색] : $\sum_{k=1}^{n} k^3$과 $\sum_{k=1}^{n} k$의 비율에 의한 $\sum_{k=1}^{n} k^3$의 발견

이제 $\sum_{k=1}^{n} k^2$과 $\sum_{k=1}^{n} k$의 비율을 이용하여 $\sum_{k=1}^{n} k^2$의 값을 구한 것, $\sum_{k=1}^{n} k$과 $\sum_{k=1}^{n} k^0$의 비율을 이용하여 $\sum_{k=1}^{n} k$의 값을 구한 것을 바탕으로, $\sum_{k=1}^{n} k^3$의 귀납적 정당화의 새로운 방법을 탐색하여 보자. $\sum_{k=1}^{n} k^2$을 구하기 위해 비교의 대상을 $\sum_{k=1}^{n} k$으로 한 것과 같이 동일하게, $\sum_{k=1}^{n} k^3$을 구하기 위한 비교 대상을 $\sum_{k=1}^{n} k$으로 설정하여 표 3과 같이 $\frac{S_n}{L_n}$의 값을 구해보자.

표 3. S_n과 L_n의 비율을 이용한 유추

대상	1	2	3	4	$\cdots$	n
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	1	9	36	100	$\cdots$	S_n
$\sum_{k=1}^{n} k$	1	3	6	10	$\cdots$	L_n
$\frac{S_n}{L_n}$	$\frac{1}{1}=1$	$\frac{9}{3}=3$	$\frac{36}{6}=6$	$\frac{100}{10}=10$	$\cdots$	$\frac{n(n+1)}{2}$

여기서, $\frac{S_n}{L_n}$의 비율로 L_n을 유추할 수 있다. 즉, $\frac{S_n}{L_n}=\frac{n(n+1)}{2}$으로 표현할 수 있다. $L_n=\frac{n(n+1)}{2}$이므로, $S_n=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$이다.

결론적으로 $\sum_{k=1}^{n} k$을 정당화하기 위해 $\sum_{k=1}^{n} k$과 $\sum_{k=1}^{n} k^0$의 비율을, $\sum_{k=1}^{n} k^2$을 정당화하기 위해 $\sum_{k=1}^{n} k^2$과 $\sum_{k=1}^{n} k$의 비율을, $\sum_{k=1}^{n} k^3$을 정당화하기 위해 $\sum_{k=1}^{n} k^3$과 $\sum_{k=1}^{n} k$의 비율을 활용하였다. 따라서, $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$ $(\alpha=4,5)$의 형태도 적절한 서로 다른 두 α, β에 의한 $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$와 $\sum_{k=1}^{n} k^{\beta}$의 비율로 귀납적 정당화가 가능할 것으로 유추할 수 있다.

3.2. 일관된 귀납적 정당화 방법을 통한 $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$ $(\alpha=4,5)$ 공식의 확장

(1) 기하적 회전대칭을 이용한 귀납적 정당화를 통한 확장

기하적 회전대칭을 이용해서 얻은 결론을 통해 다음과 같이 정리할 수 있다. 첫째, [그림 3]의 1차원 기하적 회전대칭을 통해 $2\sum_{k=1}^{n} k=(n+1)\sum_{k=1}^{n} 1$을 얻을 수 있다. 둘째, [그림 4]의 2차원 기하적 회전대칭을 통해 $3\sum_{k=1}^{n}\left[k\left(\sum_{i=1}^{k} 1\right)\right]=(2n+1)\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{k} 1\right)\right]$

을 얻을 수 있다. 셋째, [그림 5]의 3차원 기하적 회전대칭을 통해 $4\sum_{k=1}^{n}\left[k\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)\right] = (3n+1)\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)\right]$을 얻을 수 있다.

위 세 가지 사례에 대한 관찰로부터 4차원과 5차원에서 다음과 같은 두 가지 추측이 가능하다.

[추측1] $5\sum_{k=1}^{n}\left[k\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i(i+1)}{2}\right)\right] = (4n+1)\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i(i+1)}{2}\right)\right]$

[추측2] $6\sum_{k=1}^{n}\left[k\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i(i+1)(i+2)}{6}\right)\right] = (5n+1)\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i(i+1)(i+2)}{6}\right)\right]$

[$\sum_{k=1}^{n} k^4$ 공식의 확장]

$5\sum_{k=1}^{n}\left[k\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i(i+1)}{2}\right)\right] = (4n+1)\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i(i+1)}{2}\right)\right]$이므로 이 식을 정리하면,

$$
\begin{aligned}
&5\sum_{k=1}^{n}\left[k\times\tfrac{k(k+1)(k+2)}{6}\right] = (4n+1)\sum_{k=1}^{n}\tfrac{k(k+1)(k+2)}{6}\\
&\sum_{k=1}^{n}k^2(k+1)(k+2) = \tfrac{4n+1}{5}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\\
&\sum_{k=1}^{n}k^4+3\sum_{k=1}^{n}k^3+2\sum_{k=1}^{n}k^2 = \tfrac{4n+1}{5}\sum_{k=1}^{n}k^3+\tfrac{12n+3}{5}\sum_{k=1}^{n}k^2+\tfrac{8n+2}{5}\sum_{k=1}^{n}k
\end{aligned}
$$

와 같다. $\sum_{k=1}^{n} k^4$을 제외하고 모두 우변으로 이항하면,

$$\sum_{k=1}^{n}k^4 = \left(\tfrac{4n-14}{5}\right)\sum_{k=1}^{n}k^3+\left(\tfrac{12n-7}{5}\right)\sum_{k=1}^{n}k^2+\left(\tfrac{8n+2}{5}\right)\sum_{k=1}^{n}k$$

이므로 이를 정리하면,

$$\sum_{k=1}^{n}k^4 = \tfrac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$$

을 얻을 수 있다. 이것은 Faulhaber의 공식([14], [16])과 일치하므로, 옳음을 확인할 수 있다.

[$\sum_{k=1}^{n} k^5$ 공식의 확장]

$6\sum_{k=1}^{n}\left[k\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i(i+1)(i+2)}{6}\right)\right] = (5n+1)\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i(i+1)(i+2)}{6}\right)\right]$이므로 이 식을 정리하면, 다음을 알 수 있다.

$$6\sum_{k=1}^{n}\left[k\times\tfrac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{24}\right]=(5n+1)\sum_{k=1}^{n}\tfrac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{24}$$
$$\sum_{k=1}^{n}k^2(k+1)(k+2)(k+3)=\tfrac{5n+1}{6}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)(k+3)$$
$$\sum_{k=1}^{n}k^5+6\sum_{k=1}^{n}k^4+11\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=\frac{5n+1}{6}\sum_{k=1}^{n}k^4+(5n+1)\sum_{k=1}^{n}k^3+\tfrac{55n+11}{6}\sum_{k=1}^{n}k^2+(5n+1)\sum_{k=1}^{n}k$$

이제, $\sum_{k=1}^{n} k^5$을 제외하고 모두 우변으로 이항하면,

$$\sum_{k=1}^{n}k^5=\left(\tfrac{5n-35}{6}\right)\sum_{k=1}^{n}k^4+(5n-10)\sum_{k=1}^{n}k^3+\left(\tfrac{55n-25}{6}\right)\sum_{k=1}^{n}k^2+(5n+1)\sum_{k=1}^{n}k$$

이므로 이를 정리하면, $\sum_{k=1}^{n} k^5=\frac{2n^6+6n^5+5n^4-n^2}{12}$을 얻을 수 있다. 이것은 Faulhaber의 공식([14], [16])과 일치하므로, 옳음을 확인할 수 있다.

(2) 비율을 이용한 귀납적 정당화를 통한 확장

앞에서 사용한 방법을 이용하면 다음과 같은 사실을 추가적으로 얻을 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{n}k^2\div\sum_{k=1}^{n}k^0=\tfrac{(n+1)(2n+1)}{6},\ \sum_{k=1}^{n}k^3\div\sum_{k=1}^{n}k=\tfrac{n(n+1)}{2}$$

위 관찰로부터 $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}\div\sum_{k=1}^{n} k^{\beta}$에서 $\alpha-\beta=2$이면 그 값이 n에 대한 이차식임을 추측할 수 있다.

[추측에 대한 확인1]

$\sum_{k=1}^{n} k^2\div\sum_{k=1}^{n} k^0=an^2+bn+c$, ($a,b,c$는 상수)라고 하자. $n=1$일 때, $\dfrac{1}{1}=1=a+b+c$이고, $n=2$일 때, $\dfrac{5}{2}=4a+2b+c$이며, $n=3$일 때, $\dfrac{14}{3}=9a+3b+c$이므로, a,b,c에 대한 연립방정식을 풀면, $a=\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{1}{2}$, $c=\dfrac{1}{6}$이다. 즉,

$$\sum_{k=1}^{n}k^2\div\sum_{k=1}^{n}k^0=\tfrac{1}{3}n^2+\tfrac{1}{2}n+\tfrac{1}{6}=\tfrac{2n^2+3n+1}{6}=\tfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

이다. $\sum_{k=1}^{n} k^0=n$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\tfrac{(n+1)(2n+1)}{6}\times\sum_{k=1}^{n}k^0=\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

임을 확인할 수 있다.

[추측에 대한 확인2]

$\sum_{k=1}^{n} k^3 \div \sum_{k=1}^{n} k = an^2+bn+c$, ($a,b,c$는 상수)라고 하자. $n=1$일 때, $1=a+b+c$이고, $n=2$일 때, $3=4a+2b+c$이며, $n=3$일 때, $6=9a+3b+c$이므로, a,b,c에 대한 연립방정식을 풀면, $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$, $c=0$이다. 즉,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \div \sum_{k=1}^{n} k = \tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{2}n = \tfrac{n^2+n}{2} = \tfrac{n(n+1)}{2}$$

이다. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$이므로

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \tfrac{n(n+1)}{2} \times \sum_{k=1}^{n} k = \left[\tfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

임을 확인할 수 있다.

이를 통해 자연수 α에 대하여, $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha+2}$와 $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$의 비율이 이차식임을 추측할 수 있다. 이를 이용하여 $\sum_{k=1}^{n} k^4$, $\sum_{k=1}^{n} k^5$으로 공식을 확장해보자.

[$\sum_{k=1}^{n} k^4$ 공식의 확장]

$\sum_{k=1}^{n} k^4$을 구하는 과정에서 $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$와 $\sum_{k=1}^{n} k^{\beta}$의 비율을 이용하기 위해 $\alpha=4$, $\beta=2$를 대입해 보자. 그러면, 추측에 따라 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k^4}{\sum_{k=1}^{n} k^2} = an^2+bn+c, \ (a,b,c\text{는 상수})$$

$n=1$일 때, $1=a+b+c$이고, $n=2$일 때, $\dfrac{17}{5}=4a+2b+c$이며, $n=3$일 때, $7=9a+3b+c$이므로 a,b,c에 대한 연립방정식을 풀면, $a=\dfrac{3}{5}$, $b=\dfrac{3}{5}$, $c=-\dfrac{1}{5}$이다. 따라서, $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} k^4}{\sum_{k=1}^{n} k^2} = \dfrac{3}{5}n^2+\dfrac{3}{5}n-\dfrac{1}{5}$이다. 그런데, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$이므로,

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \tfrac{3n^2+3n-1}{5} \times \sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{3n^2+3n-1}{5} \times \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

이다. 따라서 $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$이다. 그런데, 이 결과는 Faulhaber의 공식([14], [16])과 일치하므로, 옳음을 확인할 수 있다.

[$\sum_{k=1}^{n} k^5$ 공식의 확장]

$\sum_{k=1}^{n} k^5$을 구하는 과정에서 $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$와 $\sum_{k=1}^{n} k^\beta$의 비율을 이용하기 위해 $\alpha = 5$, $\beta = 3$을 대입해 보자. 그러면, 추측에 따라 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k^5}{\sum_{k=1}^{n} k^3} = an^2 + bn + c, \ (a, b, c\text{는 상수})$$

$n = 1$일 때, $1 = a + b + c$이고, $n = 2$일 때, $\frac{11}{3} = 4a + 2b + c$이며, $n = 3$일 때, $\frac{23}{3} = 9a + 3b + c$이므로 a, b, c에 대한 연립방정식을 풀면, $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = -\frac{1}{3}$이다. 따라서, $\frac{\sum_{k=1}^{n} k^5}{\sum_{k=1}^{n} k^3} = \frac{2}{3}n^2 + \frac{2}{3}n - \frac{1}{3}$이다. 그런데, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$이므로, $\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{2n^2+2n-1}{3} \times \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{2n^2+2n-1}{3} \times \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$이다. 따라서 $\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{2n^6+6n^5+5n^4-n^2}{12}$이다. 그런데, 이 결과는 Faulhaber의 공식([14], [16])과 일치하므로, 옳음을 확인할 수 있다.

3.3. 결론

고등학교 ⟨대수⟩과목에서 Faulhaber의 공식의 일부를 다루고 있다. 구체적으로는 $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$의 공식이다. 본 연구에서는 $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$에 대한 교과서 분석을 바탕으로 α의 값의 변화와 무관한 일관성을 지닌 귀납적 정당화 방법을 탐구하고, 이를 바탕으로 고등학교 수준에서 $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ $(\alpha = 4, 5)$ 공식을 유추를 통해 탐색하였다.

첫째, 선행연구 분석을 통해 일관성을 가진 귀납적 정당화 방법으로 두 가지를 추출하였는데, 하나는 기하적 회전대칭이고, 다른 하나는 $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$와 $\sum_{k=1}^{n} k^\beta$의 비율이다.

둘째, 기하적 회전대칭을 이용해서 1, 2, 3차원에서 아래 식을 도출하였다.

$$2\sum_{k=1}^{n} k = (n+1)\sum_{k=1}^{n} 1$$
$$3\sum_{k=1}^{n}\left[k\left(\sum_{i=1}^{k} 1\right)\right] = (2n+1)\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{k} 1\right)\right]$$
$$4\sum_{k=1}^{n}\left[k\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)\right] = (3n+1)\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)\right]$$

위의 식에 대한 관찰로부터 4차원과 5차원에서 다음과 같은 두 가지 추측을 도출하였는데,

$$5\sum_{k=1}^{n}\left[k\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i(i+1)}{2}\right)\right]=(4n+1)\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i(i+1)}{2}\right)\right]$$

$$6\sum_{k=1}^{n}\left[k\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i(i+1)(i+2)}{6}\right)\right]=(5n+1)\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i(i+1)(i+2)}{6}\right)\right]$$

이 식으로부터 $\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$, $\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{2n^6+6n^5+5n^4-n^2}{12}$을 유도할 수 있었다.

셋째, $\frac{\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha}}{\sum_{k=1}^{n}k^{\beta}}$에서 $\alpha-\beta=2$이면 $\frac{\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha}}{\sum_{k=1}^{n}k^{\beta}}=an^2+bn+c$, $(a,b,c$는 상수)임을 추측하였다. 구체적으로, $\sum_{k=1}^{n}k^4$, $\sum_{k=1}^{n}k^5$을 유도하기 위해 $\frac{\sum_{k=1}^{n}k^4}{\sum_{k=1}^{n}k^2}=an^2+bn+c$, $\frac{\sum_{k=1}^{n}k^5}{\sum_{k=1}^{n}k^3}=an^2+bn+c$, $(a,b,c$는 상수)을 활용하였다. 그 결과, 회전대칭을 이용한 것과 동일한 $\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$, $\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{2n^6+6n^5+5n^4-n^2}{12}$을 유도할 수 있었다.

마지막으로, 본 연구의 결과를 통해 첫째, 고등학교 수열 단원의 연속된 자연수의 거듭제곱의 합에 대한 학교수학 수준에서의 일관성을 지닌 체계적 정리가 이루어질 것으로 기대되고, 둘째, 수학과제탐구 과목의 탐구주제로써 '$\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha}$의 공식'을 다룰 수 있는 기초가 마련될 것으로 기대되고, 셋째, 귀납적 유추 전략의 적용을 통해 다양한 수학적 확장 가능성을 확인하였으며, 넷째, 교직수학에서는 계산의 복잡성으로 인해 불필요해 보이지만, $\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha}$의 공식을 $\alpha\geq 6$에서도 동일한 방식으로 확장할 수 있을 것으로 기대된다.

References

1. Kang, D. H., Kang, M. M., Kang, B. L., Gu, N. G., Kim, H. M., Min, S. H., Park, J. S., Park, J. H., Shin, D. S., Ahn, J. H., Oh, S. K., Oh, S. Y., Lee, K. H., Lee, S. H., Lee, Y. H., & Jue, H. Y. (2019). *Calculus*. Shinsung Press.
2. Ministry of Education (2015). *Mathematics curriculum*. Notification of the Ministry of Education No. 2015-74 [Vol 8]. Ministry of Education.
3. Ministry of Education (2022). *Mathematics curriculum*. Notification of the Ministry of Education No. 2022-33 [Vol 8]. Ministry of Education.

4. Kim, B. N. (2001). *A teaching methods sum of sequences using figures.* [Master's thesis, Hanyang University].
5. Kim, W. K., Joe, M. S., Bang, K. S., Yeon, J. K., Shin, J. H., Lim, S. H., Kim, D. H., Kang, S. J., Kim, K. T., Park, H. J., Shim, J. S., Oh, H. J., Lee, D. K., Lee, S. J., & Jung, J. H. (2024). *Mathematics I.* Bisangkyoyeuk Press.
6. Kim, H. S., & Park, S. J. (2002). A study on various teaching method for finding the sum of sequences. *Explorations into Future Education, 23*(1), 209-238.
7. Kim, H. S. (2001). *A study on various teaching method for finding the sum of sequences.* [Master's thesis, Josun University].
8. Park, K. B. (2019). *A study on the summation of the powers of natural numbers.* [Master's thesis, Busan National University].
9. Park, S. O. (2005). *A study on the general soluton of* $\sum_{k=1}^{n} k^m$. [Master's thesis, Kunsan National University].
10. Suh, B. E. et al. (2018). Ân analytical study on the change of mathematics curriculum. Research report BD 18070008. Korea Foundation for the Advancement of Science and Creativity.
11. Suh, B. E. (2025). *Practice of mathematical teaching aids and technological tools.* Chungnam National University Press.
12. Jung, J. E. (2007). *A study on various teaching methods for finding the sum of sequences by the visualization.* [Master's thesis, Sungkeungan University].
13. Hang, S. O., Kang, B. K., Yeon, K. J., Lee, K. Y., Kim, S. Y., Lee, M. H., Kim, W. I., Park, M. H., & Park, S. Y. (2024). *Mathematics I.* Mi Re En Press.
14. Beardon, A. F. (1996). Sums of powers of integers. *The American Mathematical Monthly, 103*(3), 201-213. `https://doi:10.1080/00029890.1996.12004725`
15. Polya, G. (1973). *Mathematics and plausible reasoning, Vol I,* Princeton University Press.
16. Schumacher, R. (2016). An extended version of Faulhaber's formula. *Journal of Integer Sequences, 19*, 16-42.

[a] Hyun Ju Jo, Teacher, Sejong Yangji High School:
Email address: `hynju116@naver.com`

[b] Bo Euk Suh, Professor, Department of Mathematics Education, Chungnam National University:
Email address: `eukeuk@cnu.ac.kr`