J. Korean Soc. Math. Edu. Ser. B: Theoretical Math. Pedagogical Math.
https://doi.org/10.7468/jksmeb.2025.32.4.229 ISSN(Print) 3059-0604
Volume 32, Number 4 (November 2025), Pages 229–249 ISSN(Online) 3059-1309

유추적 사고를 활용한 일반화된 펠 수열의 항등식 유도
A STUDY ON DERIVATION OF IDENTITIES FOR THE GENERALIZED PELL SEQUENCE BY ANALOGICAL REASONING

허남구 [a]

Abstract. Analogical reasoning has been utilized in the extension of mathematical thinking and problem solving. In this study, by using conceptual analogy, we conjectured identities in the generalized Pell sequence corresponding to those in Heo([9])'s generalized Fibonacci sequence, and by using methodological analogy, we proved that the conjectured identities hold. Furthermore, we conjectured identities in certain forms of second-order linear recurrence sequences and proved their validity. This study expands identities from generalized Fibonacci sequences to those of certain second-order linear recurrence sequences by employing conceptual and methodological analogy.

1. 서론

유추적 사고는 유사한 두 대상에 대하여 한 대상이 가지고 있는 특성을 다른 대상도 가지고 있을 것이라는 추론으로 수학적 개념의 발달 과정이나 수학 문제 해결에 활용되어 왔다([16, 22]). Lee([16])는 수학적 개념의 발달 과정에서 집합론의 기수의 상등, 유한집합의 대등과 무한집합의 대등 사이의 관계를 바탕으로 유추적 사고를 적용하여 무한집합의 산술 체계를 완성할 수 있었으며, 다항방정식의 근과 계수와의 관계와 sine방정식의 테일러급수 사이의 관계에 유추적 사고를 적용하여 무한급수의 합 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$을 구하였고, 유추적 사고를 적용하여 음수와 복소수의 연산이 체계화되었다고 하였다. Lyou, Shin과 Han([19])은 norm 형식의 개념을 바탕으로 이차방정식의

Received by the editors September 30, 2025. Revised November 12, 2025. Accepted Nov. 14, 2025.
2020 *Mathematics Subject Classification.* 97F60, 97I30.
Key words and phrases. Analogical reasoning, Conceptual analogy, Methodological analogy, Pell sequence, Generalized Pell sequence, Generalized Pell identity
주요어: 유추적 사고, 개념 유추, 방법 유추, Pell 수열, 일반화된 Pell 수열, 일반화된 Pell 항등식
.

근의 공식에 유추적 사고를 적용하여 삼차방정식의 근의 공식을 유도하였으며, 삼차방정식의 근의 공식에 유추적 사고를 적용하여 사차방정식의 근의 공식을 유도하였다. Erdniev와 Han([5])은 유추적 사고를 활용의 측면에서 두 가지로 구분하였는데, 수학적 개념을 구성하는 유추를 개념 유추라고 하였으며, 수학 문제 해결에 활용하는 유추를 방법 유추라고 정의하였다. 개념 유추는 유사한 두 대상 A, B에 대하여 A와 B가 성질 $x_1, x_2, \cdots, x_n$을 모두 만족하고, A가 성질 y를 만족하면 B도 y를 만족할 것이라고 사고하는 것이다. 반면 방법 유추는 유사한 두 문제 A, B에 대하여 A가 방법 x를 이용하여 해결되었을 때, B도 방법 x를 이용하면 해결할 수 있을 것이라 사고하는 것이다. 즉, Lee([16])가 제시한 무한집합의 산술 체계 및 음수와 복소수의 연산의 사례는 개념 유추이며, Lyou, Shin과 Han([19])이 제시한 삼차방정식과 사차방정식의 근의 공식을 유도하는 사례는 방법 유추라 볼 수 있다.

유추적 사고는 두 개념 또는 문제 사이의 유사성이 필수적으로 요구된다. 피보나치(Fibonacci) 수열 $\{F_n\}$은 초깃값이 $F_0 = 0, F_1 = 1$이고 점화식이 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geq 2)$이고, 펠(Pell) 수열 $\{P_n\}$은 초깃값이 $P_0 = 0, P_1 = 1$이고 점화식이 $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ $(n \geq 2)$인 수열이므로, 펠 수열은 2차 선형 재귀 관계라는 점에서 피보나치 수열과 유사하다. 마찬가지로 일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$을 초깃값이 $GF_0 = a, GF_1 = b$이고 점화식이 $GF_n = GF_{n-1} + GF_{n-2}$ $(n \geq 2)$([9, 10, 27]), 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$을 초깃값이 $GP_0 = a, GP_1 = b$이고 점화식이 $GP_n = 2GP_{n-1} + GP_{n-2}$ $(n \geq 2)$([4])라고 정의하면, 일반화된 펠 수열은 일반화된 피보나치 수열과 유사하다. 따라서 일반화된 펠 수열의 새로운 성질은 일반화된 피보나치 수열의 성질에 개념 유추를 적용하여 찾을 수 있다.

유추에서 유사한 두 대상은 바탕 영역과 목표 영역으로 구분하는 데, 이미 알고 있는 수학적 개념 또는 문제를 바탕 영역이라 하고, 바탕 영역의 개념이나 문제 해결 방법을 적용하기 위한 대상을 목표 영역이라 한다. 이때 유추에서는 바탕 영역의 수학적 대상과 대응하는 목표 영역의 수학적 대상을 찾는 것이 중요하다. 즉, 바탕 영역의 A와 B, 목표 영역의 C에 대하여 'A:B=C:D'를 만족시키는 목표 영역의 D를 찾는 것이 중요하다. 목표 영역의 수학적 대상이 바탕 영역의 수학적 대상에 적절하게 대응되었을 때는 문제 해결에 도움을 줄 수 있지만, 부적절하게 대응되었을 때는 문제가 해결되지 않을 수도 있다([8]). 따라서 일반화된 펠 수열의 성질을 찾기 위해서는 일반화된 피보나치 수열의 수학적 대상과 대응하는 일반화된 펠 수열의 적합한 대상을 찾아야 한다.

본 연구에서는 개념 유추를 활용하여 Heo([9])가 제시한 일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$의 성질에 대응하는 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$의 성질을 추측하고, 방법 유추를 활용하여 일반화된 펠 수열의 성질을 증명하고자 하였다.

2. 연구의 배경

2.1. 일반화된 피보나치 수열과 일반화된 펠 수열

피보나치 수열 $\{F_n\}$은 초깃값이 $F_0 = 0, F_1 = 1$이고 점화식이 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geq 2)$인 2차 선형 재귀 관계를 갖는 수열이다. 또한 루카스(Lucas) 수열 $\{L_n\}$은 초깃값이 $L_0 = 2, L_1 = 1$이고 점화식이 $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ $(n \geq 2)$인 2차 선형 재귀 관계를 갖는 수열이다. 비네 공식을 이용하여 구한 피보나치 수열과 루카스 수열의 일반항 F_n과 L_n은 다음과 같다.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$
$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

피보나치 수열을 일반화한 수열에 대한 연구가 다수 이루어졌다([9, 10, 11, 12, 13, 20, 27]). 일반화된 피보나치 수열은 연구자의 관점에 따라 여러 방법으로 정의될 수 있다. 첫째, Horadam([10]), Yang과 Kim([27]), Heo([9])는 일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$을 초깃값이 $GF_0 = a, GF_1 = b$이고 점화식이 $GF_n = GF_{n-1} + GF_{n-2}$ $(n \geq 2)$인 수열로 정의하였다. 둘째, Horadam([11]), Kalman과 Mena([12])는 일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$을 초깃값이 $GF_0 = a, GF_1 = b$이고 점화식이 $GF_n = pGF_{n-1} + qGF_{n-2}$ $(n \geq 2)$인 수열로 정의하였다. 셋째, Miles([20])는 일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$을 초깃값이 $GF_0 = GF_1 = \cdots = GF_{k-2} = 0$, $GF_{k-1} = 1$이고 점화식이 $GF_n = GF_{n-1} + GF_{n-2} + \cdots + GF_{n-k}$ $(n \geq k)$인 수열로 정의하였다. 넷째, Kim과 Park([13])은 일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$을 초깃값이 $GF_0 = 0, GF_n = 2^{n-1}$ $(1 \leq n < k)$이고 점화식이 $GF_n = GF_{n-1} + GF_{n-2} + \cdots + GF_{n-k}$ $(n \geq k)$인 수열로 정의하였다. 본 연구에서는 Horadam([10]), Yang과 Kim([27]), Heo([9])의 정의와 같이 일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$을 초깃값이 $GF_0 = a, GF_1 = b$이고 점화식이 $GF_n = GF_{n-1} + GF_{n-2}$ $(n \geq 2)$인 수열로 정의하였다. 이때, 초깃값이 $GF_0 = 0, GF_1 = 1$이고 점화식이 $GF_n = GF_{n-1} + GF_{n-2}$ $(n \geq 2)$인 수열은 피보나치 수열이고, 초깃값이 $GF_0 = 2, GF_1 = 1$이고 점화식이 $GF_n = GF_{n-1} + GF_{n-2}$ $(n \geq 2)$인 수열은 루카스 수열이다.

피보나치 수열 $\{F_n\}$의 일반항을 구하는 방법과 유사하게 비네 공식을 이용하여 구한 일반화된 피보나치 수열의 일반항 GF_n은 다음과 같다.

$$GF_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad (\text{단}, C_1, C_2\text{는 상수})$$

펠 수열 $\{P_n\}$은 초깃값이 $P_0 = 0, P_1 = 1$이고 점화식이 $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ $(n \geq 2)$인 2차 선형 재귀 관계를 갖는 수열이다. 펠 수열은 2차선형 재귀 관계라는 점에서 피보나치 수열과 유사하다. 비네 공식을 이용하여 구한 펠 수열의 일반항 $\{P_n\}$은 다음과 같다.

$$P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\}$$

피보나치 수열의 사례와 유사하게 펠 수열을 일반화한 수열에 대한 연구도 다수 이루어졌다([2, 4, 24, 25]). 일반화된 펠 수열은 연구자의 관점에 따라 여러 방법으로 정의될 수 있다. 첫째, Catarino([2])는 일반화된 펠 수열 $\{GP_{k,n}\}$을 초깃값이 $GP_{k,0} = 0, GP_{k,1} = 1$이고 점화식이 $GP_{k,n} = 2GP_{k,n-1} + kGP_{k,n-2}$ $(n \geq 2)$인 수열로 정의하였다. 둘째, Trojnar-Spelina와 Włoch([24])는 일반화된 펠 수열 $\{GP_{k,n}\}$을 초깃값이 $GP_{k,0} = 0, GP_{k,1} = 1$이고 점화식이 $GP_{k,n} = kGP_{k,n-1} + (k-1)GP_{k,n-2}$ $(n \geq 2)$인 수열로 정의하였다. 셋째, Yağmur([25])는 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$을 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 초깃값이 $GP_0 = 0, GP_1 = 1$이고 점화식이 $GP_n = 2aGP_{n-1} + (b - a^2)P_{n-2}$ $(n \geq 2)$인 수열로 정의하였다. 넷째, Dışkaya와 Menken([4])은 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$을 초깃값이 $GP_0 = a, GP_1 = b$이고 점화식이 $GP_n = 2GP_{n-1} + GP_{n-2}$ $(n \geq 2)$인 수열로 정의하였다. 본 연구에서는 Dışkaya와 Menken([4])의 정의와 같이 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$을 초깃값이 $GP_0 = a, GP_1 = b$이고 점화식이 $GP_n = 2GP_{n-1} + GP_{n-2}$ $(n \geq 2)$인 수열로 정의하였다. 이때, 초깃값이 $GP_0 = 0, GP_1 = 1$이고 점화식이 $GP_n = 2GP_{n-1} + GP_{n-2}$ $(n \geq 2)$인 수열은 펠 수열이다.

일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$의 일반항을 구하는 방법과 유사하게 비네 공식을 이용하여 구한 일반화된 펠 수열의 일반항 GP_n은 다음과 같다.

$$GP_n = C_1(1+\sqrt{2})^n + C_2(1-\sqrt{2})^n \quad (\text{단}, C_1, C_2\text{는 상수})$$

Heo([9])는 피보나치 수열 $\{F_n\}$과 루카스 수열 $\{L_n\}$을 일반화한 일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$에서의 새로운 항등식 3개를 다음과 같이 제시하였으며, 이와 관련된 따름정리 12개를 제시하였다.

$$GF_{n+m} + (-1)^m GF_{n-m} = GF_n L_m$$

$$F_{m+1}GF_{n+m} - F_m GF_{n+m+1} = (-1)^m GF_n$$

$$(-1)^{m+1}GF_n + F_{m+1}(GF_{n+m} + GF_{n+m+2}) = GF_{n+2m+2}$$

2.2. 수학교육에서의 유추적 사고

수학교육에서 유추적 사고는 개념의 확장과 문제 해결에 활용되고 있다([16, 22]). Polya([23])는 수학 문제를 해결하기 위한 전략으로 유추를 제시하고 있으며, 유추적 사고를 위한 발문으로 '친숙한 문제 중 미지인 것이 같거나 유사한 문제를 생각해보자.'

등을 제시하고 있다. 2022 개정 수학과 교육과정([21], p. 69)은 추론 역량을 함양하기 위한 교수학습방법으로 '귀납, 유추 등의 개연적 추론을 통해 수학적 추측을 제기하고 일반화하며 증명하면서, 수학적 증거와 논리적 근거를 바탕으로 비판적으로 사고하는 태도를 갖게 한다.'를 제시하고 있다. 이처럼 유추적 사고는 2022 개정 수학과 교육과정에서 강조하는 문제 해결 역량과 추론 역량의 함양에 도움을 줄 수 있다.

Erdniev와 Han([5])은 바탕 문제에서 성립하는 성질과 유사한 목표 문제의 수학적 개념을 구성하는 유추를 개념 유추라고 하였으며, 바탕 문제의 문제 해결 방법과 유사한 방법으로 목표 문제를 해결하는 유추를 방법 유추라고 정의하였다. 즉, 개념 유추는 2022 개정 수학과 교육과정([21])의 추론 역량에서 제시하는 수학적 추측을 제기하고 일반화하는 것과 관련되어 있으며, 방법 유추는 Polya([23])가 제시한 문제 해결을 위한 발견술과 관련되어 있다.

개념 유추와 관련된 연구는 추측과 일반화를 통한 수학적 지식의 확장과 관련되어 있다. Han([7])은 삼각형의 코사인 정리를 일반화화여 n각형에서의 코사인 정리로 확장하였으며, Lyou, Han와 Shin([18])은 개념 유추를 적용하여 삼각형의 높이와 방접원에 대해 연구하였다. 또한 Yang과 Lee([26])는 수학영재학생이 유추를 통해 이차곡선의 성질로부터 이차곡면에서의 성질을 탐구하도록 하였으며, Kim과 Park([14])은 수학영재학생이 유추를 통해 학교수학에서 제수가 1차인 다항식에서만 한정하여 다루는 조립제법을 일반화하여 제수가 n차인 다항식에서의 조립제법을 탐구하도록 하였다. 이처럼 개념 유추는 학교수학에서의 지식을 확장하는 것과 더불어 영재학생이 유추를 통해 수학적 지식을 탐구하고 일반화하는 과정을 경험할 수 있는 기회를 제공하는 데 활용되고 있다.

방법 유추와 관련된 연구는 학생의 문제 해결력 신장과 관련된다. Lee와 Kim([15])은 학생에게 인수분해를 지도함에 있어 유추는 인수분해 문제를 해결하는 데 도움을 준다고 하였으며, Ban과 Shin([1])은 시각적 표상을 통한 유추가 수학적 문제 해결에 유의미하다고 하였다. Heo([8])는 주어진 이심률에 대한 이차곡선을 작도하는 문제에서 바탕 문제와 목표 문제 사이의 적절한 대응 관계는 목표 문제의 해결에 도움을 준다고 하였다. 이처럼 방법 유추는 문제 해결력 신장에 도움을 준다.

유추적 사고가 나타나기 위해서는 바탕 영역과 목표 영역 사이의 유사성이 중요하다. Gentner와 Markman([6])은 바탕 영역과 목표 영역이 외형적으로 유사한지와 구조적으로 유사한지에 따라 완전 유사성(literal similarity), 구조 유사성(structural similarity), 표면 유사성(surface similarity), 변칙 유사성(anomaly similarity)으로 구분하였다. Gentner와 Markman([6])이 분류한 유사성의 유형은 그림 1과 같다.

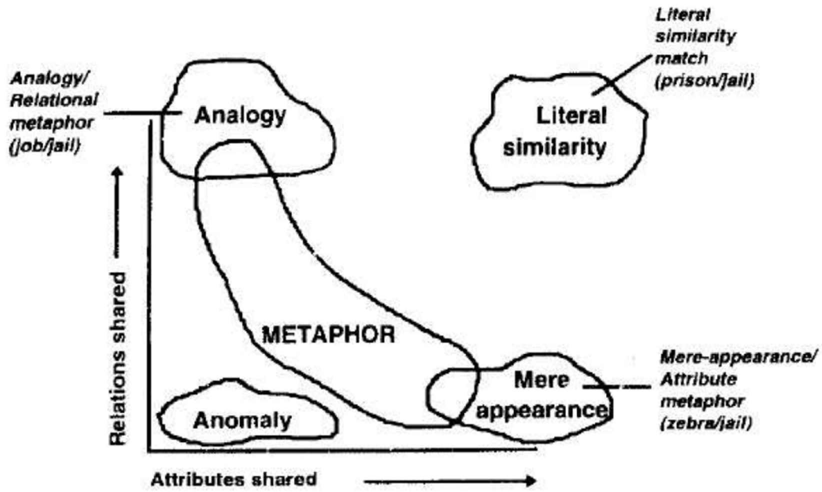

그림 1. Gentner와 Markman([6])이 제시한 유사성의 유형

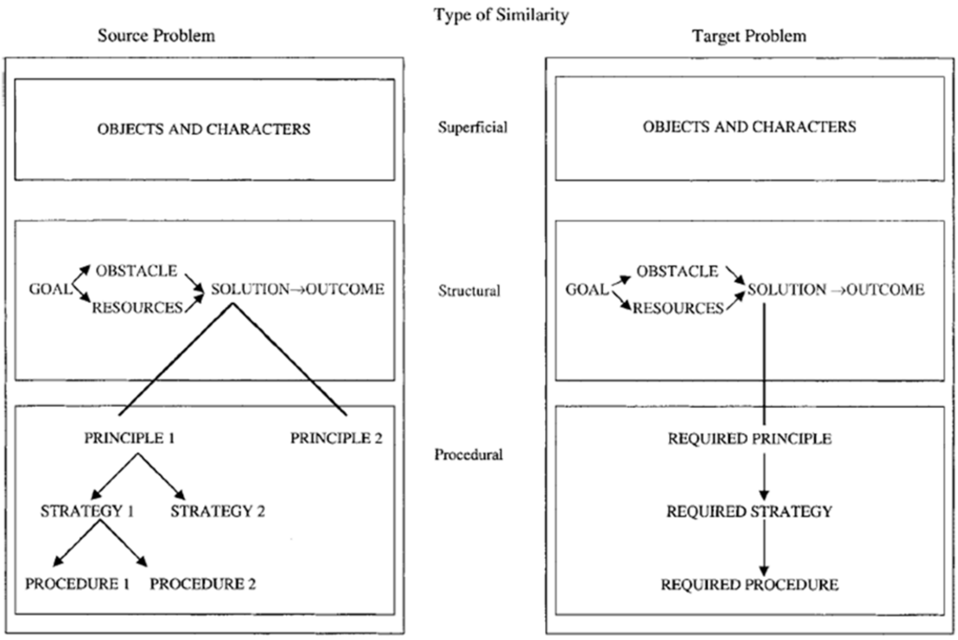

그림 2. Chen([3])이 제시한 절차 유사성

유추적 사고가 수학적 지식의 확장 및 문제 해결력 신장에 도움을 줄 수 있지만 항상 성공적인 문제 해결을 보장하지는 않는다. Chen([3])은 유추적 사고를 사용하기 위해 바탕 문제와 목표 문제를 적절하게 대응하였더라도 바탕 문제의 문제 해결 방법 및 전략에 대응되는 목표 문제에서의 방법 및 전략을 찾지 못할 경우에는 목표 문제를

해결할 수 없다고 하였으며, 문제 해결 방법 및 전략 사이의 유사성으로 그림 2와 같이 절차 유사성을 제안하였다.

또한 Heo([8])는 바탕 문제와 목표 문제 사이의 잘못된 대응 관계가 문제 해결에 어려움을 야기할 수 있다고 하였으며, 바탕 문제의 여러 수학적 대상 사이의 관계를 고려하여 목표 문제의 수학적 대상과 대응시켜야 한다고 강조하였다. 이처럼 바탕 문제와 목표 문제 사이의 적절한 대응 관계는 수학적 지식의 확장 및 문제 해결력 신장에 도움을 줄 수 있지만, 학생이 유추적 방법을 적용하는 과정에서 어려움을 느끼거나 바탕 문제와 목표 문제 사이의 대응이 잘못되었을 때에는 오히려 문제로 작용할수 있다고 강조하면서 그림 3과 같이 잠재적 유사성을 제안하였다.

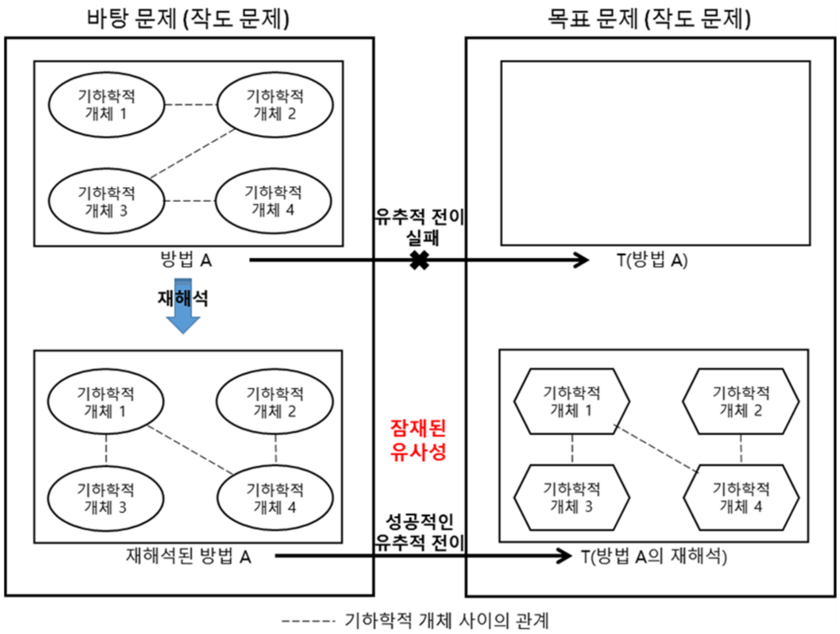

그림 3. Heo([8])가 제시한 잠재적 유사성

3. 연구 결과 및 결론

본 연구에서는 개념 유추를 이용하여 일반화된 피보나치 수열에 대한 항등식 3개에 대응하는 일반화된 펠 수열에 대한 3개의 항등식을 추측하고, 방법 유추를 이용하여 일반화된 펠 수열에 대한 항등식을 증명하고자 한다. 이때 Heo([8])에 따르면 바탕 문제와 목표 문제 사이의 잘못된 대응 관계는 방법 유추를 통하여 목표 문제를 해결하는 데

어려움을 야기할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 개념 유추를 통해 추측한 일반화된 펠 수열에서의 항등식이 진위를 살펴보고자 하였다. 이때, 추측한 항등식이 반례가 존재하여 거짓인 경우에는 바탕 문제에 대응하는 목표 문제의 문제 해결 방법이나 전략, 절차에 의해 야기된 문제가 아니라 명제 자체가 잘못된 것이다. 따라서 이 경우는 Heo([8])가 제시한 잠재적 유사성을 기반으로 바탕 문제와 대응 문제 사이의 대응 관계를 재구성하여 새로운 항등식을 추측하고 증명하는 과정을 반복하고자 한다.

3.1. $GF_{n+m} + (-1)^m GF_{n-m} = GF_n L_m$에 대응하는 항등식의 탐구

유추적 사고는 바탕 문제와 목표 문제 사이의 대응 관계가 중요하다. 일반화된 펠 수열에서의 항등식을 유도하기 위해서는 일반화된 피보나치 수열과 일반화된 펠 수열 사이의 대응 관계를 살펴볼 필요가 있다. 일반화된 피보나치 수열에서의 항등식 $GF_{n+m} + (-1)^m GF_{n-m} = GF_n L_m$은 일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$과 루카스 수열 $\{L_n\}$ 사이의 관계를 나타내고 있다([9]). 따라서 일반화된 피보나치 수열에 대응하는 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$, 루카스 수열에 대응하는 수열을 생각할 필요가 있다.

피보나치 수열과 루카스 수열의 관계에 맞추어 펠 수열에서의 루카스 수열에 대응하는 수열을 고려할 수 있다. 첫째, 피보나치 수열, 루카스 수열, 펠 수열은 모두 초깃값과 점화관계로 정의된다는 것을 이용할 수 있다. 펠 수열에서 루카스 수열에 대응하는 수열은 초깃값이 루카스 수열의 초깃값과 동일할 것이라는 가정 아래, 펠 수열에서 루카스 수열에 대응하는 수열 $\{Q_n\}$을 생각할 수 있다. 그러면 수열 $\{Q_n\}$은 초깃값이 $Q_0 = 2, Q_1 = 1$이고 점화식이 $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$ $(n \geq 2)$인 2차 선형 재귀 관계를 갖는 수열이다. 초깃값의 유사성을 기반으로 한 대응 관계를 표로 나타내면 표 1과 같다.

표 1. 초깃값의 유사성을 기반으로 한 대응 관계

	바탕 영역	목표 영역
첫 번째 수열	피보나치 수열 $\{F_n\}$ $F_0 = 0, F_1 = 1$	펠 수열 $\{P_n\}$ $P_0 = 0, P_1 = 1$
두 번째 수열	루카스 수열 $\{L_n\}$ $L_0 = 2, L_1 = 1$	대응하는 수열 $\{Q_n\}$ $Q_0 = 2, Q_1 = 1$
세 번째 수열	일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$ $GF_0 = a, GF_1 = b$	일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$ $GP_0 = a, GP_1 = b$
점화식	$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geq 2)$	$b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}$ $(n \geq 2)$

일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$과 루카스 수열 $\{L_n\}$에서의 항등식 $GF_{n+m}+(-1)^m GF_{n-m} = GF_n L_m$에 개념 유추를 적용하여 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$과 수열 $\{Q_n\}$에 대응하는 항등식을 추측하면 다음과 같다.

추측 1. $GP_{n+m} + (-1)^m GP_{n-m} = GP_n Q_m$

추측 1에서 $\{GP_n\}$에 $\{P_n\}$, m과 n의 값에 각각 2와 3을 대입하면 $P_5 + (-1)^2 P_1 = P_3 Q_2$이다. 하지만 $P_1 = 1, P_3 = 5, P_5 = 29$와 $Q_2 = 4$를 대입하면 등식의 좌변의 값은 30이고, 우변의 값은 20이 된다. 즉, 추측 1은 성립하지 않는다. 이는 피보나치 수열과 루카스 수열의 관계에 맞추어 펠 수열에서의 루카스 수열에 대응하는 수열 $\{Q_n\}$이 잘못된 것임을 의미한다. 따라서 Heo([8])가 제안한 바와 같이, 피보나치 수열과 루카스 수열의 관계에 맞추어 펠 수열에서의 루카스 수열에 대응하는 수열을 재설정해야 할 필요가 있다.

둘째, 피보나치 수열, 루카스 수열, 펠 수열은 모두 비네 공식으로 나타낼 수 있다. 피보나치 수열과 펠 수열에 대한 비네 공식은 다음과 같다.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$
$$P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ (1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n \}$$

이때, 피보나치 수열과 펠 수열의 일반항에서 $\sqrt{5}$와 $2\sqrt{2}$는 각각 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}$와 $(1+\sqrt{2}) - (1-\sqrt{2})$를 계산한 결과와 같다. 이는 피보나치 수열과 펠 수열의 일반항에서 유사한 측면이 있음을 의미한다. 따라서 피보나치 수열과 루카스 수열의 관계에 맞추어 펠 수열에서의 루카스 수열에 대응하는 수열의 일반항은 루카스 수열의 일반항과 유사한 수열일 가능성이 있다. 이를 위해 루카스 수열의 일반항을 살펴보면 다음과 같다.

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

루카스 수열의 일반항을 이용하여 펠 수열에서의 루카스 수열에 대응하는 수열을 $\{PL_n\}$이라 하면, 그 일반항은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$PL_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$$

이 수열을 펠-루카스(Pell-Lucas) 수열이라고 하자. 그러면 펠-루카스 수열 $\{PL_n\}$은 초깃값이 $PL_0 = 2$, $PL_1 = 2$이고 점화식이 $PL_n = 2PL_{n-1} + PL_{n-2}$ $(n \geq 2)$인 2차 선형 재귀 관계를 갖는 수열이다.

$\phi_F = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \psi_F = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \phi = 1+\sqrt{2}, \psi = 1-\sqrt{2}$라 할 때, 일반항의 유사성을 기반으로 한 대응 관계는 표 2와 같다.

한편, 일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$과 루카스 수열 $\{L_n\}$에서의 항등식 $GF_{n+m} + (-1)^m GF_{n-m} = GF_n L_m$에 개념 유추를 적용하여 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$과 수열

표 2. 일반항의 유사성을 기반으로 한 대응 관계

	바탕 영역	목표 영역
첫 번째 수열	피보나치 수열 $\{F_n\}$ $F_n = \frac{1}{\phi_F - \psi_F}(\phi_F^n - \psi_F^n)$	펠 수열 $\{P_n\}$ $P_n = \frac{1}{\phi - \psi}(\phi^n - \psi^n)$
두 번째 수열	루카스 수열 $\{L_n\}$ $L_n = \phi_F^n + \psi_F^n$	대응하는 수열 $\{PL_n\}$ $PL_n = \phi^n + \psi^n$
세 번째 수열	일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$ $GF_n = C_1\phi_F^n + C_2\psi_F^n$	일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$ $GP_n = C_1\phi^n + C_2\psi^n$
점화식	$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ (n \geq 2)$	$b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}\ (n \geq 2)$

$\{PL_n\}$에 대응하는 항등식을 추측하면 다음과 같으며, 이 추측이 참인 명제임을 다음과 같이 증명할 수 있다.

정리 2. $GP_{n+m} + (-1)^m GP_{n-m} = GP_n PL_m$

위의 정리 2는 일반화된 펠 수열과 펠-루카스 수열의 일반항을 이용하여 증명할 수 있다. 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$과 펠-루카스 수열 $\{PL_n\}$의 일반항은 각각 $GP_n = C_1\phi^n + C_2\psi^n$ (단, C_1, C_2는 상수), $PL_n = \phi^n + \psi^n$이므로

$$\begin{aligned} GP_{n+m} - GP_n PL_m &= \left(C_1\phi^{n+m} + C_2\psi^{n+m}\right) - (C_1\phi^n + C_2\psi^n)(\phi^m + \psi^m) \\ &= -(C_1\phi^n\psi^m + C_2\phi^m\psi^n) = -\phi^m\psi^m\left(C_1\phi^{n-m} + C_2\psi^{n-m}\right) \\ &= -(-1)^m\left(C_1\phi^{n-m} + C_2\psi^{n-m}\right) = -(-1)^m GP_{n-m} \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$GP_{n+m} + (-1)^m GP_{n-m} = GP_n PL_m$$

이다.

정리 2의 식에서 m의 값을 n으로 정하고, 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$을 각각 펠 수열 $\{P_n\}$과 펠-루카스 수열 $\{PL_n\}$이라 하면 다음의 두 따름 정리를 얻을 수 있다.

따름 정리 3. $P_{2n} = P_n PL_n$

따름 정리 4. $PL_{2n} = PL_n^2 + 2(-1)^{n+1}$

일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$의 부분수열 $\{GP_{n_k}\} = \{GP_{n+km}\}$을 이용하면 따름 정리 5와 6을 얻을 수 있으며, 따름 정리 5를 이용하면 따름 정리 7을 얻을 수 있다.

따름 정리 5. 홀수 m에 대하여 $\sum_{t=0}^{k} GP_{n+tm} = \frac{GP_{n+(k+1)m} + GP_{n+km} - GP_{n-m} - GP_n}{PL_m}$이다.

따름 정리 5는 정리 2를 이용하여 만든 $k+1$개의 등식을 더하여 증명할 수 있다. 정리 2에 의해 다음 $k+1$개의 등식이 성립한다.

$$GP_{n+m} - GP_{n-m} = GP_n PL_m$$
$$GP_{n+2m} - GP_n = GP_{n+m} PL_m$$
$$GP_{n+3m} - GP_{n+m} = GP_{n+2m} PL_m$$
$$\cdots\cdots$$
$$GP_{n+(k+1)m} - GP_{n+(k-1)m} = GP_{n+km} PL_m$$

이때, $k+1$개의 등식의 양변을 모두 더하면

$$GP_{n+(k+1)m} + GP_{n+km} - GP_{n-m} - GP_n = PL_m \sum_{t=0}^{k} GP_{n+tm}$$

이다. 따라서

$$\sum_{t=0}^{k} GP_{n+tm} = \frac{GP_{n+(k+1)m} + GP_{n+km} - GP_{n-m} - GP_n}{PL_m}$$

이다.

따름 정리 6. 짝수 m에 대하여 $\sum_{t=0}^{k} GP_{n+tm} = \frac{GP_{n+(k+1)m} - GP_{n+km} - GP_n + GP_{n-m}}{PL_m - 2}$이다.

따름 정리 6도 따름 정리 5와 마찬가지로 정리 2를 이용하여 만든 $k+1$개의 등식을 더하여 증명할 수 있다. 정리 2에 의해 다음 $k+1$개의 등식이 성립한다.

$$GP_{n+m} + GP_{n-m} = GP_n PL_m$$
$$GP_{n+2m} + GP_n = GP_{n+m} PL_m$$
$$GP_{n+3m} + GP_{n+m} = GP_{n+2m} PL_m$$
$$\cdots\cdots$$
$$GP_{n+(k+1)m} + GP_{n+(k-1)m} = GP_{n+km} PL_m$$

이때, $k+1$개의 등식의 양변을 모두 더하면

$$\sum_{t=0}^{k} GP_{n+tm} - GP_n + GP_{n+(k+1)m} + \sum_{t=0}^{k} GP_{n+tm} - GP_{n+km} + GP_{n-m} = PL_m \sum_{t=0}^{k} GP_{n+tm}$$

이다. 따라서

$$\sum_{t=0}^{k} GP_{n+tm} = \frac{GP_{n+(k+1)m} - GP_{n+km} - GP_n + GP_{n-m}}{PL_m - 2}$$

이다.

따름 정리 7. $\sum_{t=0}^{n} GP_t = \frac{GP_n+GP_{n+1}-GP_1+GP_0}{2}$

따름 정리 7은 따름 정리 5의 식에 $n = 0, m = 1$을 대입하여 얻을 수 있다. 따름 정리 5의 식에 $n = 0, m = 1$을 대입하면

$$\sum_{t=0}^{k} GP_t = \frac{GP_k + GP_{k+1} - GP_{-1} - GP_0}{PL_1}$$

이다.

$PL_1 = 2$이고, 일반화된 펠 수열의 항을 음의 정수 범위까지 확장하면 점화식으로부터 $GP_{-1} + 2GP_0 = GP_1$이므로 $GP_0 + GP_{-1} = GP_1 - GP_0$가 되어

$$\sum_{t=0}^{n} GP_t = \frac{GP_n + GP_{n+1} - GP_1 + GP_0}{2}$$

이다.

따름 정리 8과 따름 정리 9은 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$이 각각 펠 수열 $\{P_n\}$과 펠-루카스 수열 $\{PL_n\}$인 경우일 때를 나타낸 것이다.

따름 정리 8. $\sum_{t=0}^{n} P_t = \frac{P_n+P_{n+1}-1}{2}$

따름 정리 9. $\sum_{t=0}^{n} PL_t = \frac{PL_n+PL_{n+1}}{2}$

일반화된 피보나치 수열에서의 항등식 $GF_{n+m} + (-1)^m GF_{n-m} = GF_n L_m$과 그 따름 정리에 대응되는 일반화된 펠 수열에서의 항등식을 정리하면 표 3과 같다.

표 3과 같이 일반화된 피보나치 수열에서의 항등식 $GF_{n+m} + (-1)^m GF_{n-m} = GF_n L_m$과 그에 대응하는 일반화된 펠 수열에서의 항등식 $GP_{n+m} + (-1)^m GP_{n-m} = GP_n PL_m$에 대하여 따름 정리 3 – 따름 정리 6는 표면적으로나 구조적으로 유사하다. 하지만 따름 정리 7 – 따름 정리 9은 표면적으로 차이가 있다.

3.2. $F_{m+1}GF_{n+m} - F_m GF_{n+m+1} = (-1)^m GF_n$에 대응하는 항등식의 탐구

일반화된 피보나치 수열에서의 항등식 $F_{m+1}GF_{n+m} - F_m GF_{n+m+1} = (-1)^m GF_n$은 피보나치 수열 $\{F_n\}$과 일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$사이의 관계를 나타내고 있다 ([9]). 일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$과 피보나치 수열 $\{F_n\}$의 항등식 $F_{m+1}GF_{n+m} - F_m GF_{n+m+1} = (-1)^m GF_n$에 개념 유추를 적용하여 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$과 펠 수열 $\{P_n\}$에 대응하는 항등식을 추측하면 다음과 같으며, 이 추측이 참인 명제임을 다음과 같이 증명할 수 있다.

정리 10. $P_{m+1}GP_{n+m} - P_m GP_{n+m+1} = (-1)^m GP_n$

표 3. 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$에서의 정리 2에 관한 대응 관계

항등식	$GF_{n+m} + (-1)^m GF_{n-m} = GF_n L_m$	$GP_{n+m} + (-1)^m GP_{n-m} = GP_n PL_m$
따름 정리 3	$F_{2n} = F_n L_n$	$P_{2n} = P_n PL_n$
따름 정리 4	$L_{2n} = {L_n}^2 + 2(-1)^{n+1}$	$PL_{2n} = PL_n^2 + 2(-1)^{n+1}$
따름 정리 5	홀수 m에 대하여 $\sum_{t=0}^{k} GF_{n+tm} = \frac{GF_{n+(k+1)m}+GF_{n+km}-GF_{n-m}-GF_n}{L_m}$	홀수 m에 대하여 $\sum_{t=0}^{k} GP_{n+tm} = \frac{GP_{n+(k+1)m}+GP_{n+km}-GP_{n-m}-GP_n}{PL_m}$
따름 정리 6	짝수 m에 대하여 $\sum_{t=0}^{k} GF_{n+tm} = \frac{GF_{n+(k+1)m}-GF_{n+km}-GF_n+GF_{n-m}}{L_m-2}$	짝수 m에 대하여 $\sum_{t=0}^{k} GP_{n+tm} = \frac{GP_{n+(k+1)m}-GP_{n+km}-GP_n+GP_{n-m}}{PL_m-2}$
따름 정리 7	$\sum_{t=0}^{n} GF_t = GF_{n+2}-GF_1$	$\sum_{t=0}^{n} GP_t = \frac{GP_n+GP_{n+1}-GP_1+GP_0}{2}$
따름 정리 8	$\sum_{t=0}^{n} F_t = F_{n+2} - 1$	$\sum_{t=0}^{n} P_t = \frac{P_n+P_{n+1}-1}{2}$
따름 정리 9	$\sum_{t=0}^{n} L_t = L_{n+2} - 1$	$\sum_{t=0}^{n} PL_t = \frac{PL_n+PL_{n+1}}{2}$

위의 정리 10은 펠 수열과 일반화된 펠 수열의 점화식을 이용하여 증명할 수 있다. 이를 위해 함수 $f(n,m)$을 $f(n,m) = P_{m+1}GP_{n+m} - P_m GP_{n+m+1}$이라 하자. 펠 수열과 일반화된 펠 수열의 점화식을 이용하면

$$\begin{aligned} f(n,m) + f(n,m+1) &= (P_{m+1}GP_{n+m} - P_m GP_{n+m+1}) + (P_{m+2}GP_{n+m+1} \\ &\qquad - P_{m+1}GP_{n+m+2}) \\ &= (P_{m+1}GP_{n+m} - P_m GP_{n+m+1}) + (P_m GP_{n+m+1} \\ &\qquad + 2P_{m+1}GP_{n+m+1} - P_{m+1}GP_{n+m+2}) \\ &= P_{m+1}GP_{n+m} + 2P_{m+1}GP_{n+m+1} - P_{m+1}GP_{n+m+2} = 0 \end{aligned}$$

이다. 따라서 $f(n,m+1) = -f(n,m)$ 임을 알 수 있다. 이때, $f(n,0) = GP_n$이므로 $f(n,m) = (-1)^m GP_n$이다. 즉, $P_{m+1}GP_{n+m} - P_m GP_{n+m+1} = (-1)^m GP_n$이다.

정리 10의 식에서 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$을 펠 수열 $\{P_n\}$이라 놓고, m의 값과 n의 값을 각각 $n-1$과 1이라 놓으면 따름 정리 11의 펠 수열에 대한 Cassini 항등식을 얻을 수 있으며, n의 값을 $n-m$이라 놓으면 따름 정리 12의 펠 수열에 대한 d'Ocagne 항등식을 얻을 수 있다. 또한 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$을 펠-루카스 수열 $\{PL_n\}$이라 하고, n의 값을 $n-m$이라 놓으면 따름 정리 13을 얻을 수 있다.

따름 정리 11 (Cassini's identity). ${P_n}^2 - P_{n+1}P_{n-1} = (-1)^{n-1}$

따름 정리 12 (d'Ocagne's identity)**.** $P_{m+1}P_n - P_mP_{n+1} = (-1)^m P_{n-m}$

따름 정리 13. $P_{m+1}PL_n - P_mPL_{n+1} = (-1)^m PL_{n-m}$

일반화된 피보나치 수열에서의 항등식 $F_{m+1}GF_{n+m} - F_mGF_{n+m+1} = (-1)^m GF_n$과 그 따름 정리에 대응되는 일반화된 펠 수열에서의 항등식을 정리하면 표 4와 같다.

표 4. 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$에서의 정리 10에 관한 대응 관계

항등식	$F_{m+1}GF_{n+m} - F_mGF_{n+m+1} = (-1)^m GF_n$	$P_{m+1}GP_{n+m} - P_mGP_{n+m+1} = (-1)^m GP_n$
따름 정리 11	${F_n}^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n-1}$	${P_n}^2 - P_{n+1}P_{n-1} = (-1)^{n-1}$
따름 정리 12	$F_{m+1}F_n - F_mF_{n+1} = (-1)^m F_{n-m}$	$P_{m+1}P_n - P_mP_{n+1} = (-1)^m P_{n-m}$
따름 정리 13	$F_{m+1}L_n - F_mL_{n+1} = (-1)^m L_{n-m}$	$P_{m+1}PL_n - P_mPL_{n+1} = (-1)^m PL_{n-m}$

표 4와 같이 일반화된 피보나치 수열에서의 항등식 $F_{m+1}GF_{n+m} - F_mGF_{n+m+1} = (-1)^m GF_n$과 그에 대응하는 일반화된 펠 수열의 항등식 $P_{m+1}GP_{n+m} - P_mGP_{n+m+1} = (-1)^m GP_n$에 대하여 따름 정리 11 – 따름 정리 13은 표면적으로나 구조적으로 유사하다.

3.3. $(-1)^{m+1}GF_n + F_{m+1}(GF_{n+m} + GF_{n+m+2}) = GF_{n+2m+2}$에 대응하는 항등식의 탐구

일반화된 피보나치 수열에서의 항등식 $(-1)^{m+1}GF_n + F_{m+1}(GF_{n+m} + GF_{n+m+2}) = GF_{n+2m+2}$는 피보나치 수열 $\{F_n\}$과 일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$사이의 관계를 나타내고 있다([9]). 일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$과 피보나치 수열 $\{F_n\}$에서의 항등식 $(-1)^{m+1}GF_n + F_{m+1}(GF_{n+m} + GF_{n+m+2}) = GF_{n+2m+2}$에 개념 유추를 적용하여 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$과 펠 수열 $\{P_n\}$에 대응하는 항등식을 추측하면 다음과 같으며, 이 추측이 참인 명제임을 다음과 같이 증명할 수 있다.

정리 14. $(-1)^{m+1}GP_n + P_{m+1}(GP_{n+m} + GP_{n+m+2}) = GP_{n+2m+2}$

위의 정리 14은 펠 수열과 일반화된 펠 수열의 일반항을 이용하여 증명할 수 있다. 펠 수열 $\{P_n\}$과 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$의 일반항은 각각 $P_n = \frac{1}{\phi - \psi}(\phi^n - \psi^n)$,

$GP_n = C_1\phi^n + C_2\psi^n$ (단, C_1, C_2는 상수)이므로

$$\begin{aligned} P_{m+1}(GP_{n+m}+GP_{n+m+2}) &= \frac{1}{\phi-\psi}(\phi^{m+1}-\psi^{m+1})\{C_1\phi^{n+m}(1+\phi^2) \\ &\qquad + C_2\psi^{n+m}(1+\psi^2)\} \\ &= \frac{1}{\phi-\psi}(\phi^{m+1}-\psi^{m+1})\{C_1\phi^{n+m}(-\phi\psi+\phi^2)+C_2\psi^{n+m}(-\phi\psi+\psi^2)\} \\ &= \frac{1}{\phi-\psi}(\phi^{m+1}-\psi^{m+1})\{C_1\phi^{n+m+1}(\phi-\psi)-C_2\psi^{n+m+1}(\phi-\psi)\} \\ &= (\phi^{m+1}-\psi^{m+1})\{C_1\phi^{n+m+1}-C_2\psi^{n+m+1}\} \\ &= C_1\phi^{n+2m+2}-C_2(\phi\psi)^{m+1}\psi^n - C_1(\phi\psi)^{m+1}\phi^n + C_2\psi^{n+2m+2} \\ &= C_1\phi^{n+2m+2}+C_2\psi^{n+2m+2}-(-1)^{m+1}(C_1\phi^n+C_2\psi^n) \\ &= GP_{n+2m+2}-(-1)^{m+1}GP_n \end{aligned}$$

이다. 따라서 $(-1)^{m+1}GP_n + P_{m+1}(GP_{n+m}+GP_{n+m+2}) = GP_{n+2m+2}$이다.

일반화된 피보나치 수열에서의 두 따름 정리 $(-1)^{m+1}F_n+F_{m+1}L_{n+m+1} = F_{n+2m+2}$와 $(-1)^{m+1}L_n + 5F_{m+1}F_{n+m+1} = L_{n+2m+2}$는 피보나치 수열과 루카스 수열 사이의 관계인 $F_{n-1}+F_{n+1} = L_n$과 $L_{n-1}+L_{n+1} = 5F_n$을 이용하여 표현한 것이다([9]).

위의 두 따름 정리에 대응하는 일반화된 펠 수열에서의 항등식을 찾기 위해 펠 수열과 펠-루카스 수열 사이의 관계를 살펴볼 필요가 있으며, 이 또한 피보나치 수열과 루카스 수열 사이의 관계와 유사할 것이라 추측할 수 있다. 또한 항등식 $L_{n-1}+L_{n+1} = 5F_n$에서 5는 $(\phi_F-\psi_F)^2$임을 이용하여 펠 수열과 펠-루카스 수열 사이의 관계를 나타내는 항등식을 추측하면 다음과 같으며, 이 추측이 참인 명제임을 다음과 같이 증명할 수 있다.

정리 15 (펠 수열과 펠-루카스 수열 사이의 관계)**.** (1) $P_{n-1}+P_{n+1} = PL_n$, (2) $PL_{n-1}+PL_{n+1} = 8P_n$

펠 수열과 펠-루카스 수열의 일반항, $\phi-\psi = 2\sqrt{2}$, $\phi\psi = -1$임을 이용하여 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned} PL_n - P_{n+1} &= (\phi^n+\psi^n) - \frac{1}{\phi-\psi}(\phi^{n+1}-\psi^{n+1}) \\ &= (\phi^n+\psi^n)-(\phi^n+\phi^{n-1}\psi+\phi^{n-2}\psi^2+\cdots+\phi\psi^{n-1}+\psi^n) \\ &= -(\phi^{n-1}\psi+\phi^{n-2}\psi^2+\cdots+\phi\psi^{n-1}) = -\phi\psi(\phi^{n-2}+\phi^{n-3}\psi+\cdots+\psi^{n-2}) \\ &= \phi^{n-2}+\phi^{n-3}\psi+\cdots+\psi^{n-2} = \frac{\phi-\psi}{\phi-\psi}(\phi^{n-2}+\phi^{n-3}\psi+\cdots+\psi^{n-2}) \\ &= \frac{1}{\phi-\psi}(\phi^{n-1}-\psi^{n-1}) = P_{n-1} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $P_{n-1}+P_{n+1}=PL_n$이 성립한다. 또한

$$\begin{aligned}8P_n - PL_{n+1} &= (\phi-\psi)^2\frac{1}{\phi-\psi}(\phi^n-\psi^n)-(\phi^{n+1}+\psi^{n+1})\\ &= (\phi-\psi)(\phi^n-\psi^n)-(\phi^{n+1}+\psi^{n+1})\\ &= (\phi^{n+1}-\phi\psi^n-\phi^n\psi+\psi^{n+1})-(\phi^{n+1}+\psi^{n+1})\\ &= -\phi\psi(\phi^{n-1}+\psi^{n-1}) = PL_{n-1}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $PL_{n-1}+PL_{n+1}=8P_n$이 성립한다.

정리 14의 항등식에서 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$을 각각 펠 수열 $\{P_n\}$과 펠-루카스 수열 $\{PL_n\}$으로 놓으면 따름 정리 16과 17을 얻을 수 있다.

따름 정리 16. $(-1)^{m+1}P_n+P_{m+1}PL_{n+m+1}=P_{n+2m+2}$

따름 정리 17. $(-1)^{m+1}PL_n+8P_{m+1}P_{n+m+1}=PL_{n+2m+2}$

일반화된 피보나치 수열에서의 항등식 $(-1)^{m+1}GF_n+F_{m+1}(GF_{n+m}+GF_{n+m+2})=GF_{n+2m+2}$과 그 따름 정리에 대응되는 일반화된 펠 수열에서의 항등식을 정리하면 표 5와 같다.

표 5. 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$에서의 정리 14에 관한 대응 관계

항등식	$(-1)^{m+1}GF_n+F_{m+1}(GF_{n+m}+GF_{n+m+2})=GF_{n+2m+2}$	$(-1)^{m+1}GP_n+P_{m+1}(GP_{n+m}+GP_{n+m+2})=GP_{n+2m+2}$
따름 정리 16	$(-1)^{m+1}F_n+F_{m+1}L_{n+m+1}=F_{n+2m+2}$	$(-1)^{m+1}P_n+P_{m+1}PL_{n+m+1}=P_{n+2m+2}$
따름 정리 17	$(-1)^{m+1}L_n+5F_{m+1}F_{n+m+1}=L_{n+2m+2}$	$(-1)^{m+1}PL_n+8P_{m+1}P_{n+m+1}=PL_{n+2m+2}$

표 5와 같이 일반화된 피보나치 수열에서의 항등식 $(-1)^{m+1}GF_n+F_{m+1}(GF_{n+m}+GF_{n+m+2})=GF_{n+2m+2}$와 그에 대응하는 일반화된 펠 수열의 항등식$(-1)^{m+1}GP_n+P_{m+1}(GP_{n+m}+GP_{n+m+2})=GP_{n+2m+2}$에 대하여 따름 정리 16과 따름 정리 17은 표면적으로나 구조적으로 유사하다.

3.4. 세 정리에 대한 $G_0=a, G_1=b, G_n=kG_{n-1}+G_{n-2}$ $(n\geq 2)$ (단, k는 상수)로의 유추

세 표 3, 4와 5를 통해 일반화된 피보나치 수열과 일반화된 펠 수열에 대응하는 세 정리 2, 10과 14가 유사함을 발견할 수 있다. 따라서 세 정리 2, 10과 14에 대하여 2차 선형 재귀 관계를 보이는 일반적인 수열로의 확장 가능성을 생각해 볼 수 있다. 즉,

피보나치 수열(또는 펠 수열), 루카스 수열(또는 펠-루카스 수열)과 일반화된 피보나치 수열(또는 일반화된 펠 수열)에 대응하는 수열 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $\{G_n\}$에 대하여 세 항등식

$$G_{n+m} + (-1)^m G_{n-m} = G_n B_m$$

$$A_{m+1}G_{n+m} - A_m G_{n+m+1} = (-1)^m G_n$$

$$(-1)^{m+1}G_n + A_{m+1}(G_{n+m} + G_{n+m+2}) = G_{n+2m+2}$$

이 성립하는지를 생각해 볼 수 있다.

$A_0 = 0, A_1 = 1, A_n = A_{n-1} + 2A_{n-2}$ $(n \geq 2)$인 수열 $\{A_n\}$과 이를 일반화한 수열 $\{G_n\}$에 대하여 $A_2G_2 - A_1G_3 = (-1)G_1$이 성립하지 않으므로 두 번째 항등식 $A_{m+1}G_{n+m} - A_mG_{n+m+1} = (-1)^mG_n$이 성립하지 않는다. 즉, 모든 2차 선형 재귀 관계를 보이는 수열이 피보나치 수열(또는 펠 수열), 루카스 수열(또는 펠-루카스 수열)과 일반화된 피보나치 수열(또는 일반화된 펠 수열)에서의 세 항등식을 만족시키는 것은 아니다. 위의 세 항등식을 만족시키는 2차 선형 재귀 관계를 보이는 수열 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $\{G_n\}$을 구하기 위하여 세 정리 2, 10과 14의 증명 과정을 분석하면 피보나치 수열(또는 펠 수열), 루카스 수열(또는 펠-루카스 수열)과 일반화된 피보나치 수열(또는 일반화된 펠 수열)에 대응하는 적절한 수열 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $\{G_n\}$을 찾을 수 있다. 세 수열 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $\{G_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$$A_0 = 0, A_1 = 1, A_n = kA_{n-1} + A_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

$$B_0 = 2, B_1 = k, B_n = kB_{n-1} + B_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

$$G_0 = a, G_1 = b, G_n = kG_{n-1} + G_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

개념 유추를 적용하면 세 수열 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $\{G_n\}$을 이용하여 세 정리 2, 10과 14에 대응하는 새로운 항등식을 추측하고 증명할 수 있다. 정리 2에 대응하는 항등식은 다음과 같다.

정리 18. $G_{n+m} + (-1)^m G_{n-m} = G_n B_m$

위의 정리 18은 두 수열 $\{B_n\}$과 $\{G_n\}$의 비네 공식을 이용하여 구한 일반항을 이용하면 증명할 수 있다. $\phi_A = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$, $\psi_A = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$라 할 때, 두 수열 $\{B_n\}$과 $\{G_n\}$의 일반항은 각각 $B_n = {\phi_A}^n + {\psi_A}^n$, $G_n = C_1{\phi_A}^n + C_2{\psi_A}^n$ (단, C_1, C_2는 상수)이므로

$$\begin{aligned} G_{n+m} - G_nB_m &= (C_1{\phi_A}^{n+m} + C_2{\psi_A}^{n+m}) - (C_1{\phi_A}^n + C_2{\psi_A}^n)({\phi_A}^m + {\psi_A}^m) \\ &= -(C_1{\phi_A}^n{\psi_A}^m + C_2{\phi_A}^m{\psi_A}^n) = -{\phi_A}^m{\psi_A}^m(C_1{\phi_A}^{n-m} + C_2{\psi_A}^{n-m}) \\ &= -(-1)^m(C_1{\phi_A}^{n-m} + C_2{\psi_A}^{n-m}) = -(-1)^mG_{n-m} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $G_{n+m}+(-1)^mG_{n-m} = G_nB_m$ 이다. 정리 10에 대응하는 항등식은 다음과 같다.

정리 19. $A_{m+1}G_{n+m} - A_mG_{n+m+1} = (-1)^mG_n$

위의 정리 19은 두 수열 $\{A_n\}$과 $\{G_n\}$의 점화식을 이용하여 증명할 수 있다. 이를 위해 함수 $f(n,m)$을 $f(n,m) = A_{m+1}G_{n+m} - A_mG_{n+m+1}$이라 하자. 두 수열 $\{A_n\}$과 $\{G_n\}$의 점화식을 이용하면

$$\begin{aligned} f(n,m) + f(n,m+1) &= (A_{m+1}G_{n+m} - A_mG_{n+m+1}) \\ &\qquad + (A_{m+2}G_{n+m+1} - A_{m+1}G_{n+m+2}) \\ &= (A_{m+1}G_{n+m} - A_mG_{n+m+1}) + (A_mG_{n+m+1} \\ &\qquad + kA_{m+1}G_{n+m+1} - A_{m+1}G_{n+m+2}) \\ &= A_{m+1}G_{n+m} + kA_{m+1}G_{n+m+1} - A_{m+1}G_{n+m+2} = 0 \end{aligned}$$

이다. 따라서 $f(n,m+1) = -f(n,m)$ 임을 알 수 있다. 이때, $f(n,0) = G_n$이므로 $f(n,m) = (-1)^mG_n$이다. 즉, $A_{m+1}G_{n+m} - A_mG_{n+m+1} = (-1)^mG_n$이다. 정리 14에 대응하는 항등식은 다음과 같다.

정리 20. $(-1)^{m+1}G_n + A_{m+1}(G_{n+m} + G_{n+m+2}) = G_{n+2m+2}$

위의 정리 20은 두 수열 $\{A_n\}$과 $\{G_n\}$의 일반항을 이용하면 증명할 수 있다. 두 수열 $\{A_n\}$과 $\{G_n\}$의 일반항은 각각 $A_n = \frac{1}{\phi_A - \psi_A}({\phi_A}^n - {\psi_A}^n)$, $G_n = C_1{\phi_A}^n + C_2{\psi_A}^n$ (단, C_1, C_2는 상수)이므로

$$\begin{aligned} A_{m+1}(G_{n+m} + G_{n+m+2}) &= \frac{1}{\phi_A - \psi_A}({\phi_A}^{m+1} - {\psi_A}^{m+1}) \times \\ &\qquad \{C_1{\phi_A}^{n+m}(1 + {\phi_A}^2) + C_2{\psi_A}^{n+m}(1 + {\psi_A}^2)\} \\ &= \frac{1}{\phi_A - \psi_A}({\phi_A}^{m+1} - {\psi_A}^{m+1})\{C_1{\phi_A}^{n+m+1}(\phi_A - \psi_A) \\ &\qquad - C_2{\psi_A}^{n+m+1}(\phi_A - \psi_A)\} \\ &= ({\phi_A}^{m+1} - {\psi_A}^{m+1})(C_1{\phi_A}^{n+m+1} - C_2{\psi_A}^{n+m+1}) \\ &= C_1{\phi_A}^{n+2m+2} - C_2(\phi_A\psi_A)^{m+1}{\psi_A}^n - C_1(\phi_A\psi_A)^{m+1}{\phi_A}^n + C_2{\psi_A}^{n+2m+2} \\ &= C_1{\phi_A}^{n+2m+2} + C_2{\psi_A}^{n+2m+2} - (-1)^{m+1}(C_1{\phi_A}^n + C_2{\psi_A}^n) \\ &= G_{n+2m+2} - (-1)^{m+1}G_n \end{aligned}$$

이다. 따라서 $(-1)^{m+1}G_n + A_{m+1}(G_{n+m} + G_{n+m+2}) = G_{n+2m+2}$이다.

3.5. 결론

유추적 사고는 수학에서 중요한 역할을 한다. 수학의 발전 과정에서 유추적 사고는 집합론, 대수학 등의 다양한 수학적 개념을 도입하고 체계화하는 데 사용되었으며([16]), 형식 불역의 원리를 이용한 수학적 개념의 확장도 유추적 사고를 이용한 것으로 볼 수 있다([17]). 또한 유사한 문제의 풀이 방법은 새로운 문제를 해결하는 데 좋은

발견술로 사용될 수 있다([22, 23]). 이러한 점에서 예비수학교사와 현직 교사는 개념 유추와 방법 유추를 이용하여 새로운 영역에서의 성질을 추측하고, 새로운 영역에서의 문제를 해결하는 과정을 경험할 필요가 있다.

이에 본 연구에서는 Heo([9])가 제시한 일반화된 피보나치 수열에서의 항등식에 개념 유추를 적용하여 일반화된 펠 수열에서의 항등식을 추측하고, 방법 유추를 적용하여 일반화된 펠 수열에서의 항등식을 증명하도록 고안하였다. 본 연구에서는 개념 유추를 통해 Heo([9])에서 제시한 정리와 따름 정리에 대응하는 일반화된 펠 수열에서의 3개의 정리와 12개의 따름 정리를 유도하였다. 더 나아가 일반화된 피보나치 수열과 일반화된 펠 수열을 일반화하여 $G_0 = a, G_1 = b, G_n = kG_{n-1} + G_{n-2}$ $(n \geq 2)$인 2차 선형 재귀 관계를 갖는 수열에서도 개념 유추를 통해 3개의 정리를 추측하고, 방법 유추를 통해 이를 증명하였다. 본 연구의 결과는 다음과 같다.

첫째, 일반화된 피보나치 수열에서의 각 요소에 대응하는 일반화된 펠 수열에서의 요소가 적절하게 대응되어야 한다. 본 연구에서 제시한 바와 같이, 초깃값을 기준으로 일반화된 피보나치 수열의 각 요소에 대응하는 일반화된 펠 수열의 요소는 일반화된 피보나치 수열에 대응하는 항등식을 만족시키지 않는다. 이는 Heo([8])의 의견과 같이, 유추적 사고에서 바탕 문제와 목표 문제 사이의 적절한 대응 관계를 찾는 것이 수학적 개념의 확장이나 문제 해결에서 중요하다.

둘째, 일반화된 피보나치 수열에서의 각 요소에 대응하는 일반화된 펠 수열에서의 요소는 비네 공식을 통한 일반항의 유사성에 근거해야 한다. 일반화된 피보나치 수열과 일반화된 펠 수열의 대응 관계를 기준으로 개념 유추를 이용하여 추측한 3개의 정리가 모두 참이며, 그에 대한 12개의 따름 정리가 모두 참이다.

셋째, 일반화된 피보나치 수열과 일반화된 펠 수열에서의 항등식을 바탕으로 특정한 형태의 2차 선형 재귀 수열에서의 항등식을 추측하고 이를 증명할 수 있다. 세 수열 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $\{G_n\}$을 각각 $A_0 = 0, A_1 = 1, A_n = kA_{n-1} + A_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $B_0 = 2, B_1 = k, B_n = kB_{n-1} + B_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $G_0 = a, G_1 = b, G_n = kG_{n-1} + G_{n-2}$ $(n \geq 2)$와 같이 정의하면 Heo([9])에서 제시한 3개의 정리로부터 추측한 명제가 모두 참임을 알 수 있다.

바탕 문제를 이용하여 목표 문제의 새로운 성질을 찾는 개념 유추와 바탕 문제의 해결 방법을 이용하여 목표 문제를 해결하는 방법 유추는 수학적 개념의 확장과 문제 해결에 큰 도움을 준다. 따라서 수학교사는 학생에게 개념 유추를 적용하여 바탕 영역의 성질로부터 가설을 생성하고, 방법 유추를 적용하여 생성한 가설이 옳은지를 검증하는 과정을 통해 유추적 사고를 경험할 필요가 있다. 더 나아가 본 연구는 수학교사와 영재 학생이 유추적 사고를 활용한 수학적 지식의 확장 능력과 문제 문제 해결 역량을 함양할 수 있는 소재로 활용될 수 있을 것으로 보인다.

References

1. Ban, E. S., & Shin, J. (2012). The effects of mathematical problem solving depending on analogical conditions. *Journal of the Korean School Mathematics Society, 15*(3), 535-563.
2. Catarino, P. (2013). A note involving two-by-two matrices of the k-Pell and k-Pell-Lucas sequences. *International Mathematical Forum, 8*(32), 1561-1568. http://dx.doi.org/10.12988/imf.2013.38164
3. Chen, Z. (2002). Analogical problem solving: A hierarchical analysis of procedural similarity. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 28*(1), 81–98. https://doi.org/10.1037/0278-7393.28.1.81
4. Dışkaya, O., & Menken, H. (2020). On the sequence of Gell numbers. *Journal of Universal Mathematics, 3*(1), 77-82. https://doi.org/10.33773/jum.679833
5. Erdniev, P. M., & Han, I. (2005). *Mathematical exploration through analogy.* Seoul: Seungsan.
6. Gentner, D., & Markman, A. B. (1997). Structure mapping in analogy and similarity. *American Psychologist, 52*(1), 45-56.
7. Han, I. (2001). A study on a generalization of the law of cosine using vector. *Communications of Mathematical Education, 21*(1), 51-64.
8. Heo, N. G. (2017). Analogical reasoning in construction of quadratic curves. *The Journal of Educational Research in Mathematics, 27*(1), 51-67.
9. Heo, N. G. (2025). Inquiry some identities for the generalized Fibonacci sequence to enhance preservice mathematics teachers' mathematising ability. *Theoretical Mathematics and Pedagogical Mathematics, 32*(2), 139-151. https://doi.org/10.7468/jksmeb.2025.32.2.139
10. Horadam, A. F. (1961). The generalized Fibonacci sequences. *The American Mathematical Monthly, 68*(5), 455-459. https://doi.org/10.1080/00029890.1961.11989696
11. Horadam, A. F. (1965). Basic properties of a certain generalized sequence of numbers. *The Fibonacci Quarterly. 3*(3), 161-176. https://doi.org/10.1080/00150517.1965.12431416
12. Kalman, D., & Mena, R. (2003). The Fibonacci Numbers: Exposed. *Mathematics Magazine, 76*(3), 167-181. https://doi.org/10.1080/0025570X.2003.11953176
13. Kim, J. H., & Park, K. S. (2009). A design of teaching unit for secondary pre-service teachers to explore generalized Fibonacci sequence. *School Mathematics, 11*(2), 243-260.
14. Kim, K., & Park, D. (2024). A case study on the generalization process of the assembly system by mathematically gifted students. *Journal of Science Education for Gifted, 16*(1), 8-25. http://dx.doi.org/10.29306/jseg.2024.16.1.8
15. Lee, C. H., & Kim, S. H. (2002). Factorization problem solving and analogy. *School Mathematics, 4*(4), 581-599.

16. Lee, K. H. (2009). The role of analogical reasoning in mathematical knowledge construction. *The Journal of Educational Research in Mathematics, 19*(3), 355-369.
17. Lee, S. W. (2002). On the principle of the permanence of equivalent forms. *School Mathematics, 4*(3), 463-481.
18. Lyou, I., Han, I., & Shin, H. (2006). A study on concept analogy of altitude and escribed circle of triangle. *Communications of Mathematical Education, 20*(1), 9-18.
19. Lyou, I., Shin, H., & Han, I. K. (2008). A study on derivation of root's formulas of cubic and quartic equation by method analogy. *Communications of mathematical education, 22*(4), 505-514.
20. Miles, E. P. (1960). Generalized Fibonacci numbers and associated matrices. *The American Mathematical Monthly, 67*(8), 745-752. https://doi.org/10.1080/00029890.1960.11989593
21. Ministry of Education (2022). *Mathematics curriculum.* Ministry of Education Notices, No. 2022-33.
22. Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning I: Induction and analogy in mathematics.* Princeton, NJ: Princeton University Press.
23. Polya, G. (1971). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University Press.
24. Trojnar-Spelina, L., & Włoch, I. (2019). On generalized Pell and Pell-Lucas numbers. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science. 43*, 2871-2877. http://doi.org/10.1007/s40995-019-00757-7
25. Yağmur, T. (2019). New approach to Pell and Pell-Lucas sequences. *Kyungpook Mathematical Journal, 59*(1), 23-34. https://doi.org/10.5666/KMJ.2019.59.1.23
26. Yang, K. Y., & Lee, U. J. (2011). An analysis on the inquiry activities of quadratic surface throughout mathematically gifted students' analogical inference. *Journal of Gifted/Talented Education, 21*(2), 269-286. https://doi.org/10.9722/jgte.2011.21.2.269
27. Yang, Y., & Kim, T. (2008). A Study on the generalized Fibonacci sequence. *The Korean Journal for History of Mathematics, 21*(4), 87-104.

[a]Nam Gu Heo, Professor, Department of Mathematics Education, Sunchon National University:
Email address: ngheo@scnu.ac.kr