

두 허근만을 갖는 실계수 다항함수에 대하여
ON REAL-COEFFICIENT POLYNOMIAL FUNCTIONS WITH
TWO NONREAL ROOTS

유익승^{a,*}, 김승수^b

ABSTRACT. This work extends the distance-product idea, traditionally assuming all real roots, to real-coefficient polynomials with one real root and one complex-conjugate pair. For cubics, introducing the tangent line to the function at the real root shows a systematic link between the contact point and slope and the real and imaginary parts of the complex roots. The same principle generalizes to quartics and higher degrees via contact polynomials tailored to the degree, preserving a common structure. The framework simplifies definite integrals in the presence of nonreal roots by reducing them to linear combinations of standard polynomial terms.

1. 서론

고등학교 수학에서 다항함수의 개형과 성질은 그래프 해석, 방정식의 근 구조, 정적분 해석에 이르기까지 광범위한 문제 해결의 토대가 된다. 특히 실근이 모두 주어지거나 기준선 $y = k$ 와의 교점이 명확한 상황에서 함숫값을 “근들과의 거리의 곱”으로 빠르게 계산하는 이른바 거리곱 류의 절차적 전략은 시험 맥락에서 널리 사용되어 왔다. 그러나 이러한 실전형 전략은 본질적으로 “모든 근이 실수”라는 전제를 전제로 하며, 켈레복소근을 포함한 경우에는 곧바로 적용되지 않는 한계를 나타낸다. 본 논문은 바로 이 간극—두 허근을 포함하는 실계수 다항함수의 경우—에서 거리곱의 아이디어를 기하적 접촉(접선/접곡선) 구조로 치환하여 확장하는 방법을 제안하고, 3차, 4차 및 일반 n 차 다항식으로의 일반화를 제공한다.

국내외 교과서·수업 담화 분석 연구는 함수 영역에서 표현 전환(algebraic-graphic-verbal-numeric)의 질이 개념 이해와 문제 해결 성과를 가르는 핵심이라는 점을 반복적으로 지적해 왔다. 예컨대 [3]에서는 고등학교 1학년 ‘이차함수-이차방정식의 관계’

Received by the editors October 02, 2025. Revised November 07, 2025. Accepted Nov. 07, 2025.
2020 *Mathematics Subject Classification*. 97D40.

Key words and phrases. Polynomial Functions in mathematics education

주요어: 다항식

*Corresponding author.

© 2025 Korean Soc. Math. Edu.



단원에 대한 분석은 교과서 텍스트가 일반화/명사화/주제 전개를 통해 대수-그래프 연결을 조직화하는 방식과, 교사의 설명 담화가 절차·이유 담화를 보강하는 방식을 대조적으로 제시한다. 이는 함수 개념을 여러 표상 간 전환(transformation & conversion)으로 체계화해야 함을 시사한다. 또한 [4]에서는 한국·독일 교과서의 함수 단위 비교를 통해 그래프 해석-대수 조작-상황 모델링의 전개 양식이 교육체제별로 다르되, 공통적으로 표상 간 연결을 중심축으로 삼는 경향을 보여 주고 있다.

이러한 표상 전환의 인지적 필수성은 Duval의 반(半)기호적 표상(registers of semi-otic representation) 이론이 체계적으로 뒷받침한다. 수학적 사고는 “같은 대상을 다른 표상으로 바꾸는 전환(conversion)”을 통해서만 성립하고, 전환 능력의 결여는 개념 형성의 병목으로 직결된다는 것이다([5]). 또한 [8]에서 Janvier는 학습자가 대수↔그래프↔언어↔수치 간 번역과 조정 능력을 길러야 함을 반복적으로 강조한다. 국내 교육과정과 교과서 분석에서도 2015·2022 개정 교육과정의 지향점에 부합하는 함수적 사고(관계의 일반화·표현·정당화·추론) 축진이 핵심으로 제시된다([11]). 요컨대, 실근 전체의 거리곱에서 복소근을 포함한 접촉 구조로의 관점 전환은 단순한 기술적 요령이 아니라, 다항함수의 근 구조(대수)와 곡선의 접촉 기하(그래프) 사이의 전환을 촉진하는 교육적 설계로 해석될 수 있다.

본 논문은 다음의 세 단계로 거리곱 전략을 확장한다. 첫째, 3차 다항함수

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

가 하나의 실근 α 와 켈레복소근 $\beta \pm \gamma i$ 를 갖는 경우, 점 $(\alpha, 0)$ 에서 함수 $f(x)$ 에 그은 접선 $g(x) = mx + n$ 을 도입하면 접점의 x 좌표가 β 와 일치하고, 기울기와 허수부분 사이에 $m = a\gamma^2$ 가 성립함을 보인다. 이를 통해

$$f(t) = a(t - \alpha)(t - \beta)^2 + g(t)$$

로 표현되어, 실근만 있는 경우의 거리곱에 “접선항”이 더해져 보정되는 구조가 도출된다. 둘째, 4차 다항함수에서 실근 α, β 와 켈레복소근 $\gamma \pm \delta i$ 를 가질 때에는 두 실근을 공통근으로 하여 4차 함수에 접하는 2차 함수 $g(x) = m(x - \alpha)(x - \beta)$ 를 도입하면 접점 x 좌표가 γ , 계수와 허수부분 사이에 $m = a\delta^2$ 가 성립하고,

$$f(t) = a(t - \alpha)(t - \beta)(t - \gamma)^2 + g(t)$$

가 된다. 셋째, 이를 일반적인 n 차 다항함수로 확장하여, 실근 $n - 2$ 개와 켈레복소근 한 쌍을 갖는 경우 다항식 차수에 맞춘 “접촉 다항식” $g(x)$ 를 구성해 거리곱을 보정하는 일반식을 제시한다. 이러한 일반화는 이후 정적분 항등식 (예: $\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta)^k dx$)와 결합되어, 허근을 포함한 복잡한 다항함수의 정적분을 표준 항들의 선형결합으로 환원하는 계산적 이점이 있음을 보일 것이다.

위 결과는 수학교육적 관점에서 다음과 같은 기여를 갖는다. 먼저 전제의 암묵적 한계를 해소하여, 학생이 근 구조의 전환(실근↔복소근)과 접촉 기하(접선·접곡선)를 연결하도록 유도한다(표상 전환의 촉진). 또한 문제 풀이의 절차적 유창성(procedural fluency)을 보존하면서, 접할 조건·근과 계수 관계 등 개념적 연결성(conceptual connections)을 강화한다. 마지막으로 학교 수업에 적용 시, 교과서의 대수적 전개와 교사 담화의 절차·이유 제시를 매개하는 설계 과제(예: “실근 1·허근 2인 3차에서 접선 g 의 기울기를 자료에서 추정-검증-일반화하기”)로 구현할 수 있다.

2. 연구의 배경

2.1. 다항함수의 거리곱

거리곱이라 개념은 다항함수의 개형에 대한 정보 중에서 특히 다항함수의 실근(중근을 포함하여)들의 좌표를 모두 알거나 다항함수와 x 축과 평행한 직선이 만나는 점의 x 좌표를(중근을 포함하여) 모두 알 때 계산에서 약간의 시간을 절약할 수 있는 것이다. 예를 들어 다음 함수를 생각하자.

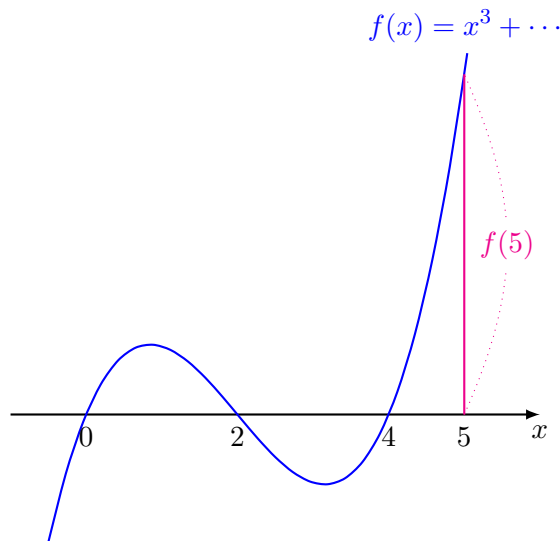


그림 1. 세 근을 갖는 삼차함수의 거리곱

이러한 상황이 거리곱을 사용하는 전형적인 상황이다. 일반적으로 주어진 그림 1로부터 우리는

$$f(x) = x(x - 2)(x - 4)$$

라는 식을 얻고 이로부터 $f(5)$ 를 다음과 같이 계산하게 된다.

$$f(5) = 5 \times (5 - 2) \times (5 - 4)$$

거리곱은 이러한 상황에서 $(5 - 4)$, $(5 - 2)$, 5 가 각각 함숫값을 계산하는 점인 $(5, 0)$ 에서 다항식의 근인 $(4, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 0)$ 과의 거리 라는 사실을 이용하는 것이다. 즉 함수식을 구하지 않고 바로 함숫값 계산해야 하는 점과 근들 사이의 거리를 곱하여 함숫값을 얻는 것이다. 특히 m 중근을 갖는 경우에는 다음 함수와 같이 함숫값을 계산하는 점과 중근과의 거리는 m 제곱을 하면 된다는 것을 쉽게 알 수 있다.

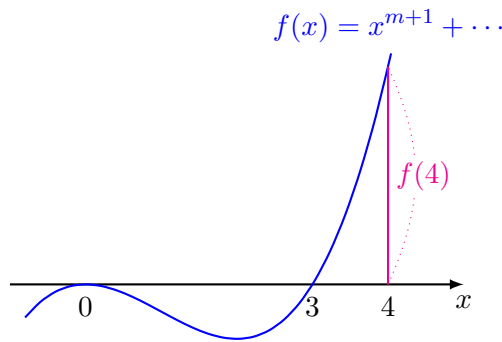


그림 2. 중근을 갖는 삼차함수의 거리곱

$$f(4) = 4^m \times (4 - 3)$$

또한 최고차항의 계수가 $a (\neq 1)$ 인 경우는 그래프의 개형에 따라 함숫값이 양수인 곳에서는 $|a|$ 를, 함숫값이 음수인 곳에서는 $-|a|$ 를 추가로 곱해주면 된다는 것을 쉽게 알 수 있다.

거리곱은 반드시 실근일 필요가 없다. 예를 들어 n 차 다항함수 $y = f(x)$ 가 $y = k$ 와 $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 에서 만난다고 가정하자. 그러면

$$f(x) - k = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

이므로 임의의 점 $x = t$ 에서의 함숫값은 $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 와의 거리곱을 계산하고 k 를 더해주면 된다는 것을 알 수 있다. 앞으로 n 차 다항함수와 교점이 n 개(중근은 중복도를 고려해서)가 되도록 하는 x 축 또는 $y = k$ 를 기준선이라 할 것이다.

2.2. 3차함수의 비례관계에 대하여

이제 3차함수의 비례관계에 대하여 살펴보자. 3차함수

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

는 다음과 같은 대칭성을 갖는다.

- (가) 3차함수의 그래프는 변곡점 $\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$ 에 대하여 점대칭이다.
- (나) 3차함수의 그래프는 다음 그림과 같이 합동인 8개의 평행사변형으로 분할된다.

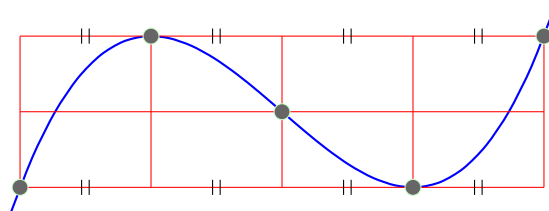


그림 3. 삼차함수의 비례관계

먼저 (가) 3차함수는 항상 변곡점을 갖는다는 사실을 논의하자. 3차함수의 이계도함수는 1차함수이고 일차함수는 오직 하나의 x 절편을 갖고 이 점의 좌우에서 항상 함숫값의 부호가 바뀌므로 3차함수는 항상 단 하나의 변곡점을 갖는다. 이제 이 변곡점의 좌표를 구해보자. 이제 변곡점에서 이계도함수 $f''(x) = 0$ 이므로 3차함수

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

에서

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

이다. 따라서 일차방정식

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6ax + 2b = 0$$

의 해는

$$x = -\frac{b}{3a}$$

이므로 3차함수 $f(x)$ 의 변곡점의 좌표는

$$\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$$

이다. 임의의 3차함수가 변곡점에 대하여 대칭임을 보이기 위해 변곡점이 원점이 되도록 평행이동하고 이 함수가 기함수임을 보이자. 즉 2차항과 상수항의 값이 0임을 보이면 된다.

$-\frac{b}{3a} = t$ 라 하면 3차함수

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

의 변곡점의 좌표는 $(t, f(t))$ 이다. 이제 주어진 3차함수를 x 축 방향으로 $-t$ 만큼, y 축의 방향으로 $-f(t)$ 만큼 평행이동한 3차함수를 $y = g(x)$ 라 하자. 그러면

$$\begin{aligned}
 g(x) &= f(x - (-t)) - f(t) \\
 (1) \qquad &= a(x+t)^3 + b(x+t)^2 + c(x+t) + d - f(t)
 \end{aligned}$$

이고 $y = g(x)$ 의 그래프가 원점 대칭이 되는지 확인하기 위해 식 (1)의 각 항의 계수를 추적해 보면 다음과 같다.

x^3 의 계수	a
x^2 의 계수	$3at + b = 3a\left(-\frac{b}{3a}\right) + b = 0$
x 의 계수	$3at^2 + 2bt + c$
상수항	$at^3 + bt^2 + ct + d - f(t) = f(t) - f(t) = 0$

위의 결과로부터 $y = g(x)$ 의 x^2 의 계수와 상수항이 0이 됨을 알 수 있다. 즉,

$$g(x) = ax^3 + (3at^2 + 2bt + c)x$$

이고 $3at^2 + 2bt + c = p$ 로 치환하면 $g(x) = ax^3 + px$ 이다. 따라서 $y = g(x)$ 는 기함수이고 원점 대칭이다. 이것은 처음 주어진 3차함수가 변곡점에 대하여 점대칭임을 의미한다.

다음으로 (나)를 확인하자. 변곡점을 원점으로 평행이동한 함수

$$y = g(x) = ax^3 + px$$

를 이용하여 증명해도 일반성을 잃지 않는다. 이제 이 함수 $g(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서 극댓값을 갖는다고 가정하면 직선 $y = g(\alpha)$ 는 $y = g(x)$ 의 그래프와 $(\alpha, g(\alpha))$ 에서 접하고, 또 다른 한 점에서 만난다.

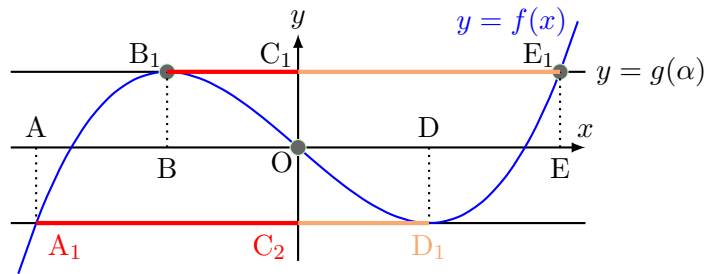


그림 4. 증명을 쉽게 하기 위해 평행이동한 삼차함수

이 또 다른 점의 x 좌표를 γ 라 하면 $y = g(x)$ 와 $y = g(\alpha)$ 를 연립하여 만든 방정식

$$ax^3 + px = g(\alpha)$$

의 해는 중근 $x = \alpha$ 와 $x = \gamma$ 이다. 그런데 이 방정식의 x^2 의 계수가 0이므로 근과 계수와의 관계로부터 $2\alpha + \gamma = 0$ 이다. 즉 $\gamma = -2\alpha$ 이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\overline{BO} : \overline{OE} = 1 : 2$$

이고 3차함수 $g(x)$ 는 변곡점에 대하여 대칭이므로

$$\overline{AB} : \overline{BD} = 1 : 2$$

이고 $\overline{BO} = \overline{OD}$ 이므로

$$\overline{AB} : \overline{BO} : \overline{OD} : \overline{DE} = 1 : 1 : 1 : 1$$

이 성립한다.

주어진 조건들로부터 식을 구하지 않고 이와 같이 거리곱이나 3차함수 비례관계를 사용하는 것은 생각보다 시간을 절약할 수 있어서 많은 학생들이 수학 문제해결에서 적용하여 활용하고 있다. 그러나 거리곱은 실근만을 갖지 않는 경우에는 이 방법이 작동하지 않음을 쉽게 알 수 있다. 이제 우리는 3, 4차 다항함수가 실근만을 갖지 않는 경우에 대해 논하고 이를 일반적인 n 차 다항함수로 일반화 시켜서 생각할 것이다.

3. 연구 결과 및 결론

3.1. 두 허근을 갖는 3차 다항함수에 대하여

이제 우리는 3차 다항함수가 실근 하나와 서로 켄레인 복소근을 갖는 경우에 대한 성질을 탐구한다. 3차 다항함수의 유일한 실근을 지나면서 3차 다항함수와 접하는 직선의 기울기와 접점에 대한 성질은 쉽게 찾아 볼 수 있는 잘 알려진 사실들이다. 특히 [1]에서 3차 방정식이 세 실근을 갖는 경우와 하나의 실근만을 갖는 경우를 자세히 논의하였다.

삼차방정식은 삼중근을 갖거나 서로 다른 세 실근을 갖거나 한 실근과 실근인 중근을 갖거나 한 실근과 두 허근을 갖는 경우로 나누어진다. 이 글에서는 실근 하나와 두 허근을 갖는 경우에 대해 알아보자. 이러한 경우 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 는 그림 5와 같은 개형을 갖는다.

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 이 실근 α 와 두 허근 $\beta + \gamma i, \beta - \gamma i$ 를 갖는다고 가정하자. 그러면

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha)(x - (\beta + \gamma i))(x - (\beta - \gamma i))$$

이다. 이제 점 $(\alpha, 0)$ 에서 $y = f(x)$ 에 접선을 그을 수 있고 이것을 그래프로 나타내면 그림 6와 같다. 이때 이 접선을 $y = g(x) = mx + n$ 라 하자.

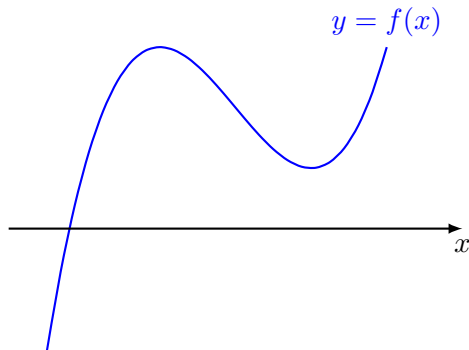


그림 5. 두 허근을 갖는 삼차함수

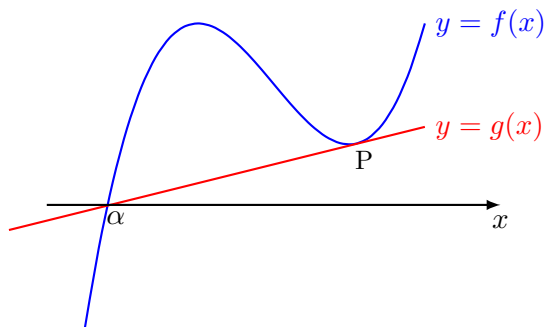


그림 6. 두 허근을 갖는 삼차함수에 접하는 접선

그림에서 $y = g(x)$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 하고 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 가 접하는 점을 P 라고 하자. 그러면 $m = \tan \theta$ 이고 다음이 성립한다.

(가) (점 P 의 x 좌표의 값) = β

(나) $a\gamma^2 = \tan \theta$

먼저 (가)를 증명하자. $f(x) = 0$ 은 $\alpha, \beta + \gamma i, \beta - \gamma i$ 를 근으로 가지므로 근과 계수와의 관계에서 $\alpha + 2\beta = -\frac{b}{a}$ 가 성립한다. 이제 방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 의 세 근의 합은 $\alpha + 2 \times$ (점 P 의 x 좌표의 값)이다. 그런데

$$f(x) - g(x) = ax^3 + bx^2 + (c - m)x + (d - n)$$

이므로 근과 계수와의 관계로부터 $\alpha + 2 \times$ (점 P 의 x 좌표의 값) = $-\frac{b}{a}$ 이다. 따라서

$$\text{(점 } P \text{의 } x \text{좌표의 값)} = \beta$$

이다. 위의 결과로부터

$$f(x) - g(x) = ax^3 + bx^2 + (c - m)x + (d - n) = a(x - \alpha)(x - \beta)^2$$

이 성립함을 알 수 있다. 식

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha)(x - (\beta + \gamma i))(x - (\beta - \gamma i))$$

에서 근과 계수와의 관계에 의해

$$\begin{aligned} \frac{c}{a} &= \alpha(\beta + \gamma i) + \alpha(\beta - \gamma i) + (\beta + \gamma i)(\beta - \gamma i) \\ &= 2\alpha\beta + \beta^2 + \gamma^2 \end{aligned}$$

이 성립한다. 또한 식

$$f(x) - g(x) = ax^3 + bx^2 + (c - m)x + (d - n) = a(x - \alpha)(x - \beta)^2$$

에서 근과 계수와의 관계에 의해

$$\frac{c - m}{a} = 2\alpha\beta + \beta^2$$

이 성립한다. 이제 마지막 두 식을 연립하면 $m = \tan \theta = a\gamma^2$ 을 얻는다.

삼차함수가 허근을 갖는 경우는 함숫값 계산할 때 거리공을 사용할 수 없는데 위의 결과를 적용하면 비슷한 결과를 얻을 수 있다.

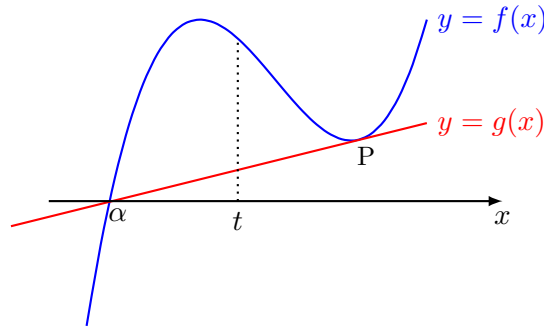


그림 7. 두 허근을 갖는 삼차함수의 거리공

그림 7에서 $f(t)$ 를 계산할 때 거리공을 사용할 수 없다. 기준선이 x 축에 대하여 실근 하나만 갖기 때문이다. 그런데 $m = \tan \theta = a\gamma^2$ 이고 $\tan \theta = \frac{f(\beta)}{\beta - \alpha}$ 임을 이용하면서 대수적으로 함숫값을 계산해 보면 다음의 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} f(t) &= a(t - \alpha)(t - (\beta + \gamma i))(t - (\beta - \gamma i)) \\ &= a(t - \alpha)((t - \beta) - \gamma i)((t - \beta) + \gamma i) \\ &= a(t - \alpha)((t - \beta)^2 + \gamma^2) \\ &= a(t - \alpha)(t - \beta)^2 + a\gamma^2(t - \alpha) \\ &= a(t - \alpha)(t - \beta)^2 + g(t) \end{aligned}$$

따라서 실근을 갖지 않는 3차 다항함수의 경우에도 위의 조건을 만족시키는 $g(x)$ 를 도입하여 거리곱을 사용할 수 있다.

한편

$$\begin{aligned} f(t) &= a(t-\alpha)((t-\beta)^2 + \gamma^2) \\ &= a(t-\alpha) \left((t-\beta)^2 + \frac{1}{a} \frac{f(\beta)}{\beta-\alpha} \right) \\ &= a(t-\alpha)(t-\beta)^2 + \frac{t-\alpha}{\beta-\alpha} f(\beta) \end{aligned}$$

이다. 서로 다른 세 실근을 갖는 경우와 실근 하나와 중근을 갖는 경우와 비교하여 $\frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}f(\beta)$ 항이 추가되는 점이 재미있다. 특히 $f(\alpha) = 0$ 이므로

$$\frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}f(\beta) = \frac{f(\beta)}{\beta-\alpha}(t-\alpha) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(t-\alpha)$$

이다. 그런데 평균값 정리에 의해

$$f'(\eta) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

인 $\eta \in (\alpha, \beta)$ 가 존재하고 삼차함수의 비례관계에 의해 $\eta = \frac{2\alpha + \beta}{3}$ 이므로 최종적으로 다음이 성립한다.

$$f(t) = a(t-\alpha)(t-\beta)^2 + f' \left(\frac{2\alpha + \beta}{3} \right) (t-\alpha)$$

임의의 점에서의 함숫값의 계산에 고정된 어떤 특정한 점에서의 미분계수가 개입된다는 점이 매우 흥미롭다.

3.2. 두 실근과 두 허근을 갖는 사차 다항함수에 대하여

우리는 3차 다항함수의 경우로부터 4차 다항함수로의 확장을 위해 비슷한 방법으로 접근 하려고 하였다. 즉 3차와 마찬가지로 접선을 생각했는데 불가능함을 알 수 있었다. 유추를 통해 4차 다항함수의 경우에는 4차 다항함수가 갖는 두 실근을 공통근으로 하고 4차 다항함수에 접하는 2차 다항함수를 생각해야 함을 알 수 있었고 이를 이용하여 다음과 같이 4차 다항함수로의 확장이 가능했고 이를 n 차 다항함수로 확장하는 실마리를 얻을 수 있었다.

사차방정식 중 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 갖는 경우에 대해 알아보고자 한다. 이러한 경우 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ 는 그림 8과 같은 개형을 갖는다.

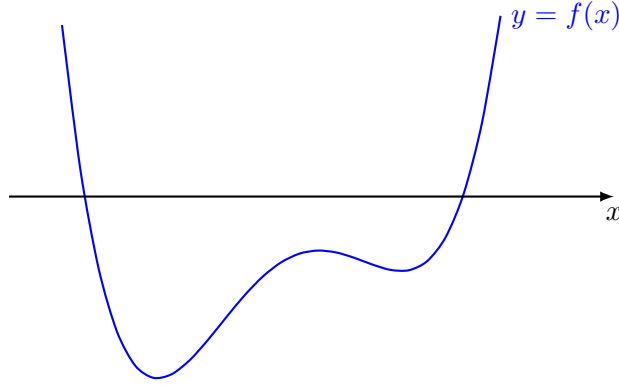


그림 8. 두 허근을 갖는 사차함수

사차방정식 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ 이 서로 다른 실근 α, β 와 두 허근 $\gamma + \delta i, \gamma - \delta i$ 를 갖는다고 가정하자. 그러면

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - (\gamma + \delta i))(x - (\gamma - \delta i))$$

이다. 이제 점 $(\alpha, 0)$ 과 $(\beta, 0)$ 을 지나고 $y = f(x)$ 에 접하는 이차함수 그릴 수 있고 이것을 그래프로 나타내면 그림 9와 같다. 이때 이 이차함수를 $y = g(x) = m(x - \alpha)(x - \beta)$ 라 하자.

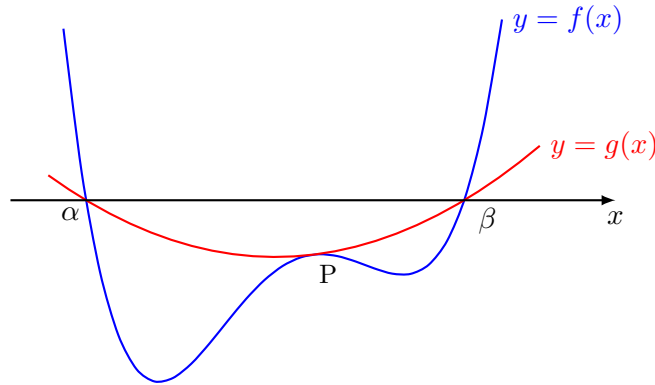


그림 9. 두 허근을 갖는 사차함수에 접하는 이차함수

그림 9에서 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 가 접하는 점을 P라고 하자. 그러면 점 P의 x 좌표가 γ 이다. 이를 증명하자. $f(x) = 0$ 은 $\alpha, \beta, \gamma + \delta i, \gamma - \delta i$ 를 근으로 가지므로 근과 계수와의 관계에서 $\alpha + \beta + 2\gamma = -\frac{b}{a}$ 가 성립한다. 이제 방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 의 네 근의 합은

$\alpha + \beta + 2 \times$ (점 P의 x 좌표의 값)이다. 그런데

$$f(x) - g(x) = ax^4 + bx^3 + (c - m)x^2 + d'x + e'$$

이므로 근과 계수와의 관계로부터 $\alpha + \beta + 2 \times$ (점 P의 x 좌표의 값) $= -\frac{b}{a}$ 이다. 따라서

$$(\text{점 P의 } x\text{좌표의 값}) = \gamma$$

이다. 위의 결과로부터

$$f(x) - g(x) = ax^4 + bx^3 + (c - m)x^2 + d'x + e' = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)^2$$

이 성립함을 알 수 있다. 식

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - (\gamma + \delta i))(x - (\gamma - \delta i))$$

에서 근과 계수와의 관계에 의해

$$\begin{aligned} \frac{c}{a} &= \alpha\beta + \alpha(\gamma + \delta i) + \alpha(\gamma - \delta i) + \beta(\gamma + \delta i) + \beta(\gamma - \delta i) + (\gamma + \delta i)(\gamma - \delta i) \\ &= \alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma^2 + \delta^2 \end{aligned}$$

이 성립한다. 또한 식

$$f(x) - g(x) = ax^4 + bx^3 + (c - m)x^2 + d'x + e' = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)^2$$

에서 근과 계수와의 관계에 의해

$$\frac{c - m}{a} = \alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma^2$$

이 성립한다. 이제 마지막 두 식을 연립하면 $m = a\delta^2$ 을 얻는다.

사차함수도 허근을 갖는 경우는 합숫값 계산할 때 거리곱을 사용할 수 없는데 위의 결과를 적용하면 비슷한 결과를 얻을 수 있다.

그림 10에서 $f(t)$ 를 계산할 때 거리곱을 사용할 수 없다. 그런데 $m = a\delta^2$ 임을 이용하면서 대수적으로 합숫값을 계산해 보면 다음의 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} f(t) &= a(t - \alpha)(t - \beta)(t - (\gamma + \delta i))(t - (\gamma - \delta i)) \\ &= a(t - \alpha)(t - \beta)((t - \gamma) - \delta i)((t - \gamma) + \delta i) \\ &= a(t - \alpha)(t - \beta)((t - \gamma)^2 + \delta^2) \\ &= a(t - \alpha)(t - \beta)(t - \gamma)^2 + a\delta^2(t - \alpha)(t - \beta) \\ &= a(t - \alpha)(t - \beta)(t - \gamma)^2 + m(t - \alpha)(t - \beta) \\ &= a(t - \alpha)(t - \beta)(t - \gamma)^2 + g(t) \end{aligned}$$

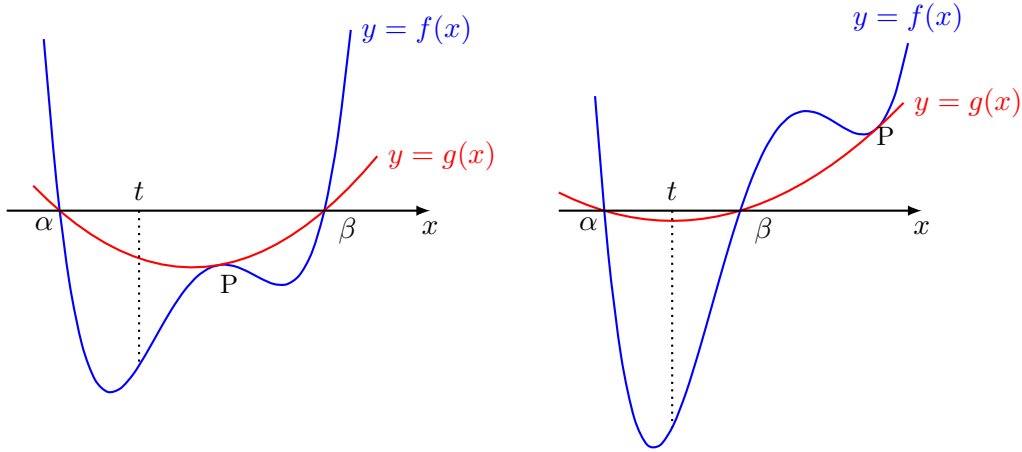


그림 10. 두 허근을 갖는 사차함수의 거리곱

실근 하나와 허근 두개를 갖는 3차 다항함수의 경우와 비슷하게 실근 두개와 허근 두개를 갖는 4차 다항함수의 경우에도 위의 조건을 만족시키는 2차 다항함수 $g(x)$ 를 도입하여 거리곱을 사용할 수 있음을 알 수 있다.

3.3. 두 허근과 $n - 2$ 개의 실근을 갖는 다항함수에 대하여

우리는 앞에서 3, 4차 방정식이 두 허근을 갖는 경우에 대해서 논의하였다. 이제 이것을 일반화하여 n 차 방정식이 실근 $n - 2$ 개와 허근 2개를 갖는 경우로 일반화 해보자. 실계수 방정식 $f(x) = 0$ 이 $n - 2$ 개의 실근과 2개의 복소근을 갖는다고 가정하자. $f(x) = 0$ 의 계수가 모두 실수라고 가정하면 이 두 복소근은 켈레복소수이다.

이제

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

의 모든 실근을 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}$ 라 하고 두 켈레복소수를 $\beta + \gamma i, \beta - \gamma i$ 라 하자. 이제

$$g(x) = m(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{n-2})$$

라 하고 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 가 한 점 $P(s, f(s))$ 에서 접한다고 가정하자. 이때 다음이 성립한다.

(가) (점 P의 x 좌표) = β

(나) $\frac{m}{a_n} = \gamma^2$

먼저 근과 계수와의 관계에 의해 $f(x) = 0$ 의 모든 해의 합은

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} = \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i + (\beta + \gamma i) + (\beta - \gamma i) = \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i + 2\beta$$

이다. 방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 은 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-2}$ 을 근으로 갖고 점 P의 x 좌표 s 를 중근으로 가지므로

$$f(x) - g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + (a_{n-2} - m)x^{n-2} + \dots$$

에 근과 계수와의 관계를 적용하면

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} = \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i + 2s$$

이다. 따라서

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} = \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i + 2\beta = \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i + 2s$$

이고 $\beta = s$ 이다.

또한 방정식 $f(x) = 0$ 의 근과 계수와의 관계에서

$$\begin{aligned} \frac{a_{n-2}}{a_n} &= \sum_{1 \leq i, j \leq n-2, i \neq j} \alpha_i \alpha_j + \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i (\beta + \gamma_i) + \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i (\beta - \gamma_i) + (\beta + \gamma_i)(\beta - \gamma_i) \\ (2) \quad &= \sum_{1 \leq i, j \leq n-2, i \neq j} \alpha_i \alpha_j + 2\beta \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i + \beta^2 + \gamma^2 \end{aligned}$$

이고 방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 의 근과 계수와의 관계로부터

$$(3) \quad \frac{a_{n-2} - m}{a_n} = \sum_{1 \leq i, j \leq n-2, i \neq j} \alpha_i \alpha_j + 2s \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i + s^2$$

을 얻는다. $\beta = s$ 이므로 식(2) - 식(3)로부터 $\frac{m}{a_n} = \gamma^2$ 을 얻는다.

3.4. 적분예의 응용

다항함수가 $f(x) = a(x - \alpha)^m(x - \beta)^n$ 의 꼴인 경우에 베타함수를 이용하여

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (x - \beta)^n dx$$

의 적분 공식을 쉽게 유도할 수 있다.

제1종 오일러 적분으로도 알려진 베타함수는 다음과 같이 두 변수 α, β 에 관한 함수

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dx$$

로 주어진다. 이때 두 변수 α, β 는 복소수이고 베타함수는 이 두 변수의 실수부분이 양수일때만 잘 정의된다. 한편 감마함수 $\Gamma(z)$ 는 z 가 복소수이고 실수부분이 양수일때

다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

부분적분에 의해 $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ 이 성립함을 보일 수 있고 따라서 n 이 자연수일때 $\Gamma(n+1) = n!$ 이 성립한다. 베타함수와 감마함수 사이에는 다음과 같은 관계가 있음이 잘 알려져 있다.

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

이제 정적분

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (x - \beta)^n dx$$

에서 $x = \alpha + (\beta - \alpha)t$ 로 치환하면

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (x - \beta)^n dx = (-1)^n (\beta - \alpha)^{m+n+1} \int_0^1 t^m (1-t)^n dt$$

임을 쉽게 보일 수 있다. 이상을 종합하면 다음 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (x - \beta)^n dx &= (-1)^n (\beta - \alpha)^{m+n+1} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)} \\ &= \frac{(-1)^n \cdot m! \cdot n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1} \end{aligned}$$

이를 이용하면 2차함수의 경우에는

$$(4) \quad \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{(\beta - \alpha)^3}{6}$$

3차함수의 경우에는

$$(5) \quad \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta)^2 dx = \frac{(\beta - \alpha)^4}{12}$$

이 성립함을 쉽게 확인할 수 있으며, 대부분의 학생들은 이러한 공식을 문제해결에 활용하고 있다. 베타함수와 감마함수는 고등학교 수학 수준을 벗어나므로 고등학교 수학에서는 2차함수와 3차함수의 경우는 실제 정적분으로 공식을 유도하고 다음과 같은 대수적 기법을 활용하여 더 고차의 다항식의 정적분의 공식을 유도하여 활용할 수 있다.

즉,

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta)^3 dx &= \int_{\alpha}^{\beta} ((x - \beta) + (\beta - \alpha))(x - \beta)^3 dx \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \beta)^4 dx + (\beta - \alpha) \int_{\alpha}^{\beta} (x - \beta)^3 dx \quad (x - \beta = t) \\
 &= \int_{\alpha - \beta}^0 t^4 dt + (\beta - \alpha) \int_{\alpha - \beta}^0 t^3 dt \\
 &= -\frac{1}{5}(\alpha - \beta)^5 + (\beta - \alpha) \left(-\frac{1}{4}(\alpha - \beta)^4 \right) \\
 &= \frac{1}{5}(\beta - \alpha)^5 - \frac{1}{4}(\beta - \alpha)^5 \\
 &= -\frac{(\beta - \alpha)^5}{20}
 \end{aligned}$$

이므로 다음 공식이 성립한다.

$$(6) \quad \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta)^3 dx = -\frac{(\beta - \alpha)^5}{20}$$

이 성립한다. 이제 식 (4), (5), (6)과 앞에서 증명한 사실들을 이용하여 실근 하나와 허근을 갖는 3차함수와 실근을 2개만 갖는 4차함수의 적분을 쉽게 할 수 있는 방법에 대해 논의한다.

- (1) 3차 다항함수가 $f(x) = (x - \alpha)h(x)$ 이고 $h(x) = 0$ 허근의 실수부분이 β , 허수 부분이 γ 일 때
 앞의 결과로부터

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)^2 + a\gamma^2(x - \alpha)$$

이므로

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= a \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta)^2 dx + a\gamma^2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha) dx \\
 &= a \left(\frac{(\beta - \alpha)^4}{12} + \gamma^2 \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} \right)
 \end{aligned}$$

와 같이 쉽게 계산할 수 있는 항들로 분해해서 적분할 수 있다.

- (2) 4차 다항함수가 $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)h(x)$ 이고 $h(x) = 0$ 허근의 실수부분이 γ , 허수부분이 δ 일 때

앞의 결과로부터

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)^2 + m(x - \alpha)(x - \beta) \\ &= a(x - \alpha)(x - \gamma)^2(x - \beta) + m(x - \alpha)(x - \beta) \\ &= a(x - \alpha)(x - \gamma)^2(x - \gamma + \gamma - \beta) + m(x - \alpha)(x - \beta) \\ &= a(x - \alpha)(x - \gamma)^3 + a(\gamma - \beta)(x - \alpha)(x - \gamma)^2 + m(x - \alpha)(x - \beta) \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} & m(x - \alpha)(x - \beta) \\ &= m(x - \alpha)(x - \gamma + \gamma - \beta) \\ &= m(x - \alpha)(x - \gamma) + m(\gamma - \beta)(x - \alpha) \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx &= a \int_{\alpha}^{\gamma} (x - \alpha)(x - \gamma)^3 dx + a(\gamma - \beta) \int_{\alpha}^{\gamma} (x - \alpha)(x - \gamma)^2 dx \\ &\quad + m \int_{\alpha}^{\gamma} (x - \alpha)(x - \gamma) dx + m(\gamma - \beta) \int_{\alpha}^{\gamma} (x - \alpha) dx \\ &= a \left(-\frac{(\gamma - \alpha)^5}{20} + (\gamma - \beta) \frac{(\gamma - \alpha)^4}{12} \right) \\ &\quad + m \left(-\frac{(\gamma - \alpha)^3}{6} + (\gamma - \beta) \frac{(\gamma - \alpha)^2}{2} \right) \end{aligned}$$

와 같이 적분하기 쉬운 항들의 조합으로 나타내어 적분 할 수 있다.

본 연구에서는 실근만을 갖는 다항함수에 대해 널리 알려진 거리곱(distance product) 방법의 한계를 극복하고, 이를 허근을 포함하는 다항함수로 확장하는 체계적인 방법론을 개발하였다. 기존의 거리곱 방법은 다항함수가 모든 실근을 가질 때만 적용 가능하다는 제약이 있었으나, 본 연구를 통해 두 허근만을 갖는 실계수 다항함수에 대해서도 유사한 접근이 가능함을 보였다.

실근 α 와 두 켤레 허근 $\beta \pm \gamma i$ 를 갖는 함수에 대해 실근을 지나는 접선을 도입하는 방법을 제시하였다. 이때 접점의 x 좌표가 허근의 실수부분 β 와 정확히 일치하며, 접선의 기울기와 허근의 허수부분 사이에 $m = a\gamma^2$ 라는 명확한 관계식이 성립함을 증명하였다. 특히 흥미로운 점은 기존의 거리곱 공식에 특정 점에서의 미분계수 항이 추가되는 구조를 발견한 것이다.

4차 다항함수에 대해서는 두 실근과 두 켤레 허근을 갖는 경우를 다루었다. 3차 함수의 접선 대신 두 실근을 지나고 다항함수에 접하는 2차 함수를 매개로 한 확장 방법을 개발하였으며, 이 경우에도 접점의 x 좌표가 허근의 실수부분과 일치하는 일관된 패턴을

확인하였다. 더 나아가 이러한 접근법을 n 차 다항함수가 $(n - 2)$ 개의 실근과 두 켄레 허근을 갖는 일반적인 경우로 확장하여 체계적인 이론적 틀을 완성하였다.

개발된 이론의 실용적 응용으로 허근을 갖는 다항함수의 정적분을 효율적으로 계산하는 방법을 제시하였다. 복잡한 다항함수를 기존의 잘 알려진 적분 공식들의 선형 결합으로 분해함으로써 계산 복잡도를 현저히 감소시킬 수 있었다. 이는 특히 제한된 시간 내에 복잡한 다항함수 문제를 해결해야 하는 상황에서 실질적인 도움을 제공할 수 있다.

본 연구는 두 허근만을 갖는 경우에 집중하였으나, 실제로는 더 많은 허근을 갖는 고차 다항함수나 중근이 허근인 경우 등 다양한 상황이 존재한다. 또한 이론적 확장과 함께 수치해석적 방법과의 결합, 컴퓨터 대수 시스템에서의 구현, 다변수 함수로의 확장 등 다양한 후속 연구가 가능할 것으로 예상된다.

이 연구가 제시한 방법론은 전통적인 거리곱 개념을 허근 영역으로 확장함으로써 실용적 문제 해결 도구의 개발과 수학적 이론의 심화라는 두 목표를 동시에 달성하였다. 특히 실수와 복소수 영역을 아우르는 통합적 관점을 제공하며, 복소해석학, 대수학, 수치해석학 등 다양한 수학 분야와의 연결점을 열어주고 있다. 궁극적으로 이러한 연구가 수학적 사고력 개발과 문제 해결 능력 향상에 기여할 수 있기를 기대한다.

References

1. Wikipedia contributors. (2025). Cubic equation. [https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic equation](https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_equation), Accessed 2025-09-25, Wikipedia, The Free Encyclopedia.
2. Lyou, I., & Han, I. (2011). Study on Problem Solving Related with Geometric Interpretation of Algebraic Expressions. *Communications of mathematical education*, 25(2), 451-472.
3. Jeon, S., & Cho C. (2015). A Study on the Written Texts of a High School Mathematics Textbook and Teacher's Classroom Discourse -A Focus on 'The Relationship between Quadratic Functions and Quadratic Equations'-. *Journal of education research in mathematics*, 25(4), 265-276.
4. Huh, N., Ahn, E., & Ko H. (2020). Comparative Analysis of the Contents of Functions in the Middle School Mathematics Textbooks in Korea and Germany. *journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics School Mathematics*, 13(2), 323-343.
5. Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. PDF reprint.
6. Janvier, C. (Ed.). (1987). Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. Lawrence Erlbaum.
7. Ko, S., Lee, J., Lee, S., Cha, S., Kim, E., & Cho, S. (2019). *High School Calculus*. Jounchaek-Sinsago.

8. Pimm, D. Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. *Educ Stud Math* 21, 91–99 (1990). <https://doi.org/10.1007/BF00311018>
9. Mainali, B. (2021). Representation in Teaching and Learning Mathematics. *International Journal of Research in Education and Science*, ERIC Fulltext.
10. Kolmogorov, A. N. (1991). *Mathematics: Its Content, Methods and Meaning*. Dover Publications.
11. Kim, J. (2023). Exploring Teaching Method of Functional Thinking through Analysis of the Elementary School Mathematics Textbooks. *School Mathematics*, 25(4). Kyungmoonsa.

^aIKSEUNG LYOU, TEACHER, YANGHYEON HIGHSCHOOL:
Email address: infgrp@hanmail.net

^bSEUNGSOO KIM, TEACHER, JEONJU KIJUN GURLS' HIGHSCHOOL:
Email address: prettyss@kijun.hs.kr