J. Korean Soc. Math. Edu. Ser. B: Theoretical Math. Pedagogical Math.
https://doi.org/10.7468/jksmeb.2025.32.4.271 ISSN(Print) 3059-0604
Volume 32, Number 4 (November 2025), Pages 271–288 ISSN(Online) 3059-1309

대학수학능력시험 함수 그래프 특성 문제에 연역적 문제만들기 방법의 적용
APPLICATION OF THE DEDUCTIVE PROBLEM MAKING METHOD TO PROBLEMS ON THE CHARACTERISTICS OF FUNCTION GRAPHS IN THE CSAT

류민영 [a]

Abstract. This study proposed a method for applying Deductive Problem Making (DPM) to past College Scholastic Ability Test (CSAT) mathematics questions. Three questions related to function graphs were selected, and new problems were created through DPM. The newly generated problems were compared with the original ones to identify altered and maintained aspects, and their interrelationships were also examined. The findings confirm the possibility of expanding initial problem substructures and indicate that DPM facilitates a deeper understanding of given problems, thereby contributing to the enhancement of problem-solving skills.

1. 서론

문제만들기(problem posing)란 새로운 문제의 생성과 주어진 문제를 다시 구성하는 것을 모두 의미하며 문제해결 전, 해결 중, 해결 후에 발생한다([11]). 수학 문제만들기에 대한 현대의 관심은 학교 교육과정 및 교육학 영역에서 꾸준히 강조되고 있다([10], [12]).

본 연구에서는 문제만들기 방법 중 [4]에서 제시된 연역적 문제만들기(Deductive Problem Making, DPM) 방법에 기반하여 문제만들기의 구체적 적용 방안을 제시하고자 한다. 연역적 문제만들기란, 풀이가 문제에 선행하는 문제만들기를 말하며 풀이가 먼저 구성되는 문제만들기 방식이다. [4]에서 출발점 문제를 원래문제(initial problem)라고 하였으며 문제해결의 각 부분을 하위구조(substructure)라고 하였다. 또한 연역적으로 만든 문제는 문제만들기를 적용한 원래문제와 문제해결 구조가 유사한 문제들을

Received by the editors October 25, 2025. Revised November 16, 2025. Accepted Nov. 19, 2025.
2020 *Mathematics Subject Classification.*93C10, 93C35.
Key words and phrases. Deductive Problem Making(DPM), substructure, problem structure analysis, characteristics of function graphs
주요어 : 연역적 문제만들기, 하위구조, 문제 구조 분석, 함수 그래프 특성
이 논문은 2025년 경상국립대학교 교육대학원 류민영의 석사학위 논문 내용의 일부를 요약, 보완한 것임
.

만들어 낼 수 있다. 연역적 문제만들기의 적용 사례는 방정식, 부등식, 작도, 중복조합 등의 영역에서 제시되었으며 본 연구에서는 이와 다른 영역인 함수 영역에서 문제를 택하고자 한다. 또한 본 연구에서 함수 그래프 특성 문제란, 함수 그래프 개형, 주기, 그래프의 특징 등을 포함하는 문제를 의미한다.

연역적 문제만들기를 적용하기 위해 본 연구에서는 대학수학능력시험의 기출문제를 선택하였다. 대학수학능력시험의 수학 영역은 수학 교육의 평가에서 사고력 측정을 강조한다([7]). 따라서 본 연구에서는 대학수학능력시험의 기출문제 중 연역적 문제만들기를 적용할 문제를 택하고자 한다. 그중 2024학년도, 2025학년도의 대학수학능력시험([8], [9])에서 함수 그래프의 특성 파악이 드러나는 문제를 3개 선택하여 연역적 문제만들기를 수행하고 그 구체적 적용 방안에 대해 살펴볼 것이다.

본 연구에서는 다음과 같이 연구 문제를 설정하였다. 첫째, 함수 그래프의 특성에 대한 세 문제에 연역적 문제만들기를 적용하여 새로운 문제를 만든다. 둘째, 연역적 문제만들기 적용 중, 하위구조의 변화가 문제에 미치는 영향을 파악한다. 셋째, 연역적 문제만들기 적용 후, 새롭게 만든 문제들 사이의 관계를 파악한다.

2. 연구의 배경

2.1. 이론적 배경

[4]에 따르면 [1]에서 제시된 What-If-Not 전략은 명제의 증명이 문제를 만드는 과정과 관련 있지 않으며 새로운 질문 제기 단계(Level Ⅲ)에서 얻어진 질문에는 학습자의 수학적 지식과 능력의 범위 밖의 질문이 얻어질 수 있다고 하였다. 이를 보완하기 위해 제시된 방법인 연역적 문제만들기는 질문이 분석과 풀이보다 선행되는 What-If-Not 전략과는 다르게 문제의 풀이가 먼저 구성이 되고 그 풀이를 바탕으로 문제를 만들어 낸다.

다시 말해 연역적 문제만들기는 출발점 문제를 먼저 선택하고 그 풀이 과정을 단계별로 나타낸 다음, 변하지 않는 것과 변하는 것을 서로 구분하여 문제해결 단계를 역으로 거슬러 올라가 새로운 문제를 만드는 방법이다. 이 때문에 연역적으로 만들어진 문제는 항상 해결할 수 있으며 문제해결 방법은 문제만들기 과정 중에 나타난다는 특징이 있다. 이와 더불어 [4]에서는 다음과 같은 문제해결의 논리적 흐름과 연역적 문제만들기의 개략적 수행 방향을 제시하였고 이를 다시 구성하면 그림 1과 같다.

[4]에서는 연역적 문제만들기(DPM)의 단계를 문제해결의 구조 분석, 문제해결의 하위구조 탐구, 연역적 문제구성(Deductive Problem Construction, DPC)의 세 단계로 제시하였다. 첫 번째 단계인 문제해결의 구조 분석 단계에서는 원래문제의 해결 과정을 주요 아이디어를 중심으로 하위구조를 나눈다. 두 번째 단계인 문제해결의 하위구조

탐구에서는 분석된 문제해결의 각 부분, 즉 하위구조의 특징을 탐구하고 변할 수 있는 것과 변할 수 없는 것을 확인한다. 또한 문제해결의 전체 과정은 유기적으로 연결되어 있으므로, 이 단계에서 문제해결의 전체 과정을 개관하며, 문제해결에 포함된 식 또는 양의 의미를 탐구하며 어디에서 변화 가능성이 있는지 보게 된다. 세 번째 단계인 연역적 문제구성(DPC)에서는 어느 하위구조에서 연역적 문제구성(DPC)을 시작할 것인지 결정하고 하위구조에서 변화된 식 또는 양을 중심으로 문제해결 단계를 역으로 거슬러 올라가면서 연역적으로 문제해결 과정을 구성한다.

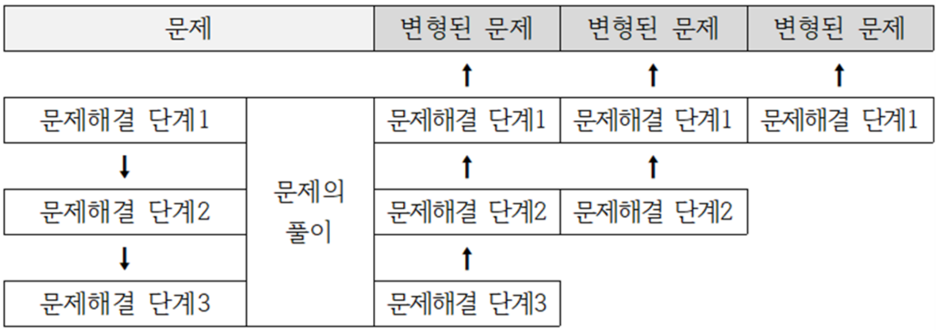

그림 1. 문제해결의 논리적 흐름과 연역적 문제만들기의 개략적 수행 방향

연역적 문제만들기가 적용된 예시는 다음과 같다. [3]에서는 무리방정식, 삼차방정식에서 연역적 문제만들기를 사용한 내용을 제시하였다. 또한 [4]는 로그가 포함된 부등식을 원래문제로 하여 연역적 문제만들기를 수행하고 로그가 포함된 방정식으로부터 지수, 무리식, 삼각함수가 포함된 방정식 등을 만들어 다양한 치환을 이용한 연역적 문제만들기의 가능성을 보여주었다. [5]에서는 연역적 문제만들기를 삼각형의 작도 문제에 활용하여 만든 문제를 일반화하는 또 다른 문제를 제시하며 What-If-Not 전략과 달리 해결 과정 분석을 기반으로 타당한 문제를 구성할 수 있다는 연역적 문제만들기의 특징을 강조하였다. [6]에서는 배치형 중복조합 문제에 대해 다른 하위구조를 구성하여 연역적 문제만들기를 시도하였다.

2.2. 연구 대상 및 방법

본 연구의 대상은 원래문제로 하는 대학수학능력시험의 기출문제로, 연구의 방법은 연역적 문제만들기 방법의 적용이다. 연구 방법은 2024학년도와 2025학년도 대학수학능력시험의 수학 영역에서 함수 그래프의 특성을 파악하는 것과 관련 있는 문제를 3개 선택한 다음, 연역적 문제만들기의 각 단계에 따라 구체적으로 문제만들기를 진행하는 것이다.

[4]는 연역적 문제만들기의 단계를 문제해결의 구조 분석, 문제해결의 하위구조(문제해결의 각 단계) 탐구, 연역적 문제구성(DPC)으로 제시하였다. 이 단계에 따라 선택한 문제에 연역적 문제만들기를 수행하였다. 본 연구에서는 하위구조를 몇 가지로 나눌 것인가에 대해 기존 연구의 연역적 문제만들기 사례 대다수에서 하위구조3까지 분류한 것을 유지하기도 하며 문제에 따라 더 많은 개수로 확대하였다. 이는 문제해결의 구조 분석에 해당한다. 하위구조를 나누는 기준은 문제해결 과정 중 새로운 것을 발견하거나 새로운 값을 찾는 등 새롭게 얻어지는 것을 중심으로 하여 나누었다. 이는 문제를 분석하는 측면에 따라 더 세분화하거나 단순화할 수 있다. 하위구조 탐구에서는 각 하위구조에서 변할 수 있는 것을 탐구하며 새로운 문제만들기에 대한 가능성을 확인한다. 마지막으로 연역적 문제구성 단계에서 변화되는 부분을 통해 새로운 문제를 생성하였다.

새로운 문제를 만든 후, 만들어진 각 문제를 원래문제와 비교하며 어떤 부분이 변화하였고 어떤 부분이 유지되었는지를 확인하였다. 또한 만든 문제들 사이의 관계에 대해서도 살펴보았다. 또한 생성된 문제들이 교육과정 내에서 적절한지 현직 고등학교 교사인 4명에게 검토를 요청하여 문제를 점검하였다.

3. 연구 결과 및 결론

3.1. 연구 결과

(1) 원래문제 1

원래문제 1. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = a\cos bx + 3$이 $x = \frac{\pi}{3}$에서 최댓값 13을 갖도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a + b$의 최솟값은? (2025학년도 수능 수학 10번)

원래문제 1은 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 $f(x) = a\cos bx + 3$이 $x = \frac{\pi}{3}$에서 최댓값 13을 가지므로 $a + 3 = 13$으로 a는 10이다. 또한 $f(x) = a\cos bx + 3$의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$이다. $f(x)$가 $x = \frac{\pi}{3}$에서 최댓값을 가지므로 $\frac{2\pi}{b} \times k = \frac{\pi}{3}$ (단, k는 자연수)이다. $\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{3k}$이므로 $b = 6k$이다. 따라서 b의 최솟값은 6이다. a는 10, b의 최솟값은 6이므로 $a+b$의 최솟값은 16이다.

주어진 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 함수 $f(x) = a\cos bx + 3$가 $x = \frac{\pi}{3}$에서 최댓값 13을 가진다는 조건에서 출발한다. 이를 바탕으로 하위구조를 나누면 표 1과 같다.

다음으로 문제해결의 하위구조 탐구를 수행하자. 연역적 문제만들기는 하위구조의 역순으로 올라가 새로운 문제를 얻으며, 하위구조3, 하위구조2, 하위구조1 순서로 각 하위구조에서 어떤 점을 변화시켜 새로운 문제를 얻을 수 있는지 알아보자. 이후 연역적 문제만들기에서도 마지막 하위구조부터 살펴보는 것을 유지할 것이다.

표 1. 원래문제 1의 하위구조

하위구조1	닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 내 $x = \frac{\pi}{3}$에서 $f(x)$가 최댓값을 가지는 것을 이용하여 $a + 3 = 13$에 의해 a의 값을 구한다.
하위구조2	주어진 함수의 주기를 이용하여 가능한 자연수 b가 $\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{3k}$ (단, k는 자연수)에 의해 $b = 6k$임을 알아낸다.
하위구조3	a값과 b의 최솟값을 통해 $a + b$의 최솟값을 구한다.

이를 통해 연역적 문제구성을 수행하자. 먼저 하위구조3을 DPC 1단계로 하는 경우, 하위구조3에서 a,b의 범위를 제한하여 어떻게 문제를 변형할 수 있는지 살펴본다. 원래문제 1의 풀이 과정 중에서는 a는 값이 하나로만 나오고 $b = 6k$ (단, k는 자연수) 형태로 제시되므로 가능한 b의 값은 $6, 12, 18, 24, \cdots$이다. 여기에서 자연수 a, b의 범위를 제한하여 순서쌍 (a, b)에 대한 $a + b$의 최댓값을 구하도록 변형한 다음 문제 1-1, 문제 1-2를 생각해 볼 수 있다.

문제 1-1. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = a\cos bx + 3$ 가 $x = \frac{\pi}{3}$에서 최댓값 13을 갖도록 하는 20 이하의 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a + b$의 최댓값은?

문제 1-2. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = a\cos bx + 3$ 가 $x = \frac{\pi}{3}$에서 최댓값 13을 갖도록 하는 30 이하의 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a + b$의 최댓값은?

문제 1-1, 문제 1-2 모두 주어진 범위 안에서 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값을 구하는 문제이다. 원래문제1과 함수 $f(x)$가 같으며 $x = \frac{\pi}{3}$에서 최댓값 13을 갖는다는 점도 변하지 않았다. 하위구조3에서 두 자연수 a, b의 범위에 대한 변화가 일어났으나 하위구조2와 하위구조1은 동일한 것이다. 즉, 구하고자 하는 a의 값이 10인 것과 $b = 6k$ (단, k는 자연수)인 점은 변하지 않는다. 따라서 문제 1-1의 결과는 $10 + 18 = 28$이고, 문제 1-2의 결과는 $10 + 30 = 40$이다. 20이하, 30이하 자연수라는 각 조건으로 인해 원래문제 1과 답이 다른 결과가 나왔음을 볼 수 있다.

이제 하위구조2에서 연역적 문제만들기를 시작해 보자. 즉, 하위구조2를 DPC 1단계로 하는 경우이다. 하위구조2에서는 주어진 함수의 주기를 이용하여 b의 최솟값을 구하였다. 하위구조2에서 $\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{3k}$ (단, k는 자연수)를 통해 $b = 2 \times 3 \times k = 6k$ 임을 얻는다. 여기에서 자연수 k에 대해 $b = 2 \times 4 \times k = 8k$ 임을 이용하도록 변형한다면 최댓값을 갖는 위치가 $x = \frac{\pi}{4}$로 변화하면 된다. 이를 이용한 문제 1-3은 다음과 같다.

문제 1-3. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = a\cos bx + 3$이 $x = \frac{\pi}{4}$에서 최댓값 13을 갖도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a + b$의 최솟값은?

문제 1-3은 최댓값을 갖는 위치가 $x = \frac{\pi}{4}$로 바뀐 것이다. 이러한 변화가 문제 풀이에 어떠한 영향을 미치는지 확인한다면, 먼저 주어진 함수 $f(x) = a\cos bx + 3$의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$이다. $x = \frac{\pi}{4}$에서 최댓값을 가지므로 $\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{4k}$, $b = 2 \times 4 \times k = 8k$이다. 따라서 b의 최솟값은 8이다. 이 문제에서는 하위구조2에서 변형이 일어나 자연수 b의 최솟값이 변화하였다. 하위구조1은 유지되고 주어진 함수가 최댓값 13을 갖는다는 조건은 원래 문제 1과 동일하므로 a의 값은 10이다. 따라서 문제 1-3에서 구하고자 하는 $a + b$의 최솟값은 $10 + 8 = 18$이다. 이와 동일한 방법으로 $b = 2 \times 6 \times k = 12k$ (단, k는 자연수)를 이용한다면 최댓값을 갖는 위치가 $x = \frac{\pi}{6}$로 변화하여야 한다. 이를 통해 문제 1-4를 얻을 수 있다.

문제 1-4. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = a\cos bx + 3$이 $x = \frac{\pi}{6}$에서 최댓값 13을 갖도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a + b$의 최솟값은?

문제 1-4도 문제 1-3과 마찬가지로 하위구조2에서 변형이 일어나 자연수 b의 최솟값이 변화한다. 그 구조는 유사하므로 문제 1-4에서 자연수 b는 $\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{6k}$ (단, k는 자연수)에 의해 $b = 2 \times 6 \times k = 12k$가 된다는 것을 알 수 있다. 따라서 b의 최솟값은 12이고 a는 원래문제 1과 동일한 10이다. 따라서 문제 1-4의 결과는 $10 + 12 = 22$가 된다.

마지막으로 하위구조1을 DPC 1단계로 한다면, 하위구조1에서 $a + 3 = 13$에 의해 a가 10임을 구하였다. 이는 주어진 함수의 최댓값이 얼마인지가 영향을 미친 것이다. 이 식에서 $a + 4 = 13$을 사용하도록 변형하자. 그럼 a의 값이 9가 되므로 주어진 함수 $f(x)$를 $f(x) = a\cos bx + 4$로 제시하면 된다. 이를 통해 다음 문제 1-5를 생각해 볼 수 있다.

문제 1-5. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = a\cos bx + 4$가 $x = \frac{\pi}{3}$에서 최댓값 13을 갖도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a + b$의 최솟값은?

문제 1-5와 원래문제 1에서 b의 최솟값을 구하는 과정은 동일하며 앞서 살펴본 바에 따라 a의 값은 9이므로 구하고자 하는 $a + b$의 최솟값은 $9 + 6 = 15$이다. 즉, 하위구조2와 하위구조3은 유지되나 원래문제 1의 하위구조1에서 $a + 3 = 13$을 통해 a의 값을 구한 부분이 $a + 4 = 13$으로 변화하면서 함수 $f(x)$의 식이 변화하였다.

이제 하위구조1에서 $a + 3 = 13$에 의해 a가 10임을 구한 과정에서 $a + 3 = 10$을 사용하도록 바꾼다면 원래문제1에서 $f(x)$의 최댓값이 10이 되도록 바꾸면 된다. 이를 통해 문제 1-6을 제시할 수 있다.

문제 1-6. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = a\cos bx + 3$이 $x = \frac{\pi}{3}$에서 최댓값 10을 갖도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a + b$의 최솟값은?

문제 1-6에서 a의 값은 $a + 3 = 10$에 의해 7이 되고 원래문제 1의 b에 대해서는 변하지 않으므로 $a + b$의 최솟값은 $7 + 6 = 13$이다. 문제 1-6도 문제 1-5와 마찬가지로 하위구조2와 하위구조3은 유지된다. 하지만 하위구조1에서 $a+3 = 10$을 이용하기 위해 함수 $f(x)$가 갖는 최댓값이 13에서 10으로 변화하며 문제의 결과에 영향을 주었다.

(2) 원래문제 2

원래문제 2. 양수 a에 대하여 $x \geq -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x & (-1 \leq x < 6) \\ a\log_4(x-5) & (x \geq 6) \end{cases}$$

이다. $t \geq 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1, t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오. (2024학년도 수능 수학 21번)

원래문제 2는 $t = 0$일 때, 구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x = 1$에서 최댓값 5를 가지므로 $g(0) = 5$이다. 한편, 함수 $y = -x^2 + 6x$는 직선 $x = 3$에 대하여 대칭이고, $f(1) = 5$, $f(3) = 9$, $f(5) = 5$이므로 $0 < t < 6$인 실수 t에 대해서 $g(t) \geq 5$이다. 따라서 $0 \leq t < 6$인 실수 t에 대해서 $g(t) \geq 5$이다. $f(5) = 5, f(6) = 0$이므로 $t = 6$일 때, 구간 $[5, 7]$에서 함수 $g(t)$는 5이상이 된다. 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $g(t)$가 최솟값을 5로 가져야 하므로 $t > 6$에 대해 살펴보아야 한다. 그럼 $x \geq 6$에서 $f(x) = a\log_4(x-5)$이고 a는 양수이므로 $f(7)$이 5보다 같거나 커야 한다. $f(7) \geq 5$이므로 $a\log_4(7-5) \geq 5$이어야 한다. 즉, $a\log_4 2 \geq 5$, $\frac{1}{2}a \geq 5$, $a \geq 10$이다.

표 2. 원래문제 2의 하위구조

하위구조1	$-1 \leq x < 6$에서 $f(x) = -x^2 + 6x$이고 문제의 함수 $g(t)$에 의해 $0 \leq t \leq 6$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5라는 점을 만족한다는 점을 파악한다.
하위구조2	$x \geq 6$에서는 $f(x)$가 밑이 1보다 큰 로그함수로, 증가함수이다. 결국 문제의 조건을 만족하기 위해서는 $f(7) \geq 5$이어야 한다.
하위구조3	$f(7) \geq 5$이므로 $a\log_4 2 \geq 5$이다. $\frac{1}{2}a \geq 5$, $a \geq 10$이다.
하위구조4	구한 a의 범위를 이용하여 양수 a의 최솟값을 찾는다.

따라서 양수 a의 최솟값은 10이다. 원래문제 2는 새롭게 파악한 내용이 생기는 단계를 기준으로 표 2처럼 하위구조4까지 나누어 볼 수 있다.

이제 문제해결의 하위구조 탐구를 진행함과 동시에 각 하위구조의 변화에 따른 연역적 문제구성을 수행하자. 먼저 하위구조4를 DPC 1단계로 설정하자. 하위구조4에서 양수 a의 최솟값을 구하였다. 이는 양수 a의 범위가 $a \geq 10$으로 구해졌기에 가능하였다. 이를 통해 하위구조4에서 가능한 양수 a 중 두 자리 자연수인 a의 합을 구하는 문제 2-1을 제시할 수 있다.

문제 2-1. 양수 a에 대하여 $x \geq -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x & (-1 \leq x < 6) \\ a \log_4(x-5) & (x \geq 6) \end{cases}$$

이다. $t \geq 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1, t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 두 자리 자연수 a의 합을 구하시오.

원래문제 2를 통해 $a \geq 10$임을 알 수 있고 이를 이용하여 조건을 만족하는 두 자리 자연수 a의 합을 구한다면 $\frac{90 \times (10+99)}{2} = 4905$ 이다. 문제 2-1은 원래문제 2와 풀이 구조는 동일하지만 구하고자 하는 결론만 다른 경우이다.

다음으로 하위구조3을 DPC 1단계로 하자. 하위구조3에서는 $a \log_4 2 \geq 5$를 이용하여 양수 a의 범위가 $a \geq 10$임을 알아낸다. $a \geq k$의 형태에서 자연수 k의 값에 따라 변형된 문제를 어떻게 얻을 수 있는지에 대한 내용은 다음과 같다.

먼저 $a \geq 6$을 이용한다면 $a \log_4 2 \geq 3$이 되는 것으로 거슬러 올라갈 수 있다. 여기에서 $a \log_4(5-3) \geq 3$를 이용하도록 하는 경우를 살펴보면 원래문제 2에서 $f(x)$가 정의되는 범위 $-1 \leq x < 6$, $x \geq 6$을 범위 $-1 \leq x < 4$, $x \geq 4$로 변형하는 것을 고려할 수 있다.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & (-1 \leq x < 4) \\ a \log_4(x-3) & (x \geq 4) \end{cases}$$

에서 $f(1) = f(3) = 3$, $y = -x^2 + 4x$는 직선 $x = 2$에 대하여 대칭이므로 $0 \leq t \leq 4$인 실수 t에 대해서 $g(t) \geq 3$이다. 이를 이용하면 문제 2-2를 얻을 수 있다.

문제 2-2. 양수 a에 대하여 $x \geq -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & (-1 \leq x < 4) \\ a \log_4(x-3) & (x \geq 4) \end{cases}$$

이다. $t \geq 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1, t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 3이 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오.

문제 2-2에서 $a \log_4(5-3) \geq 3$이므로 $a \geq 6$이다. 따라서 양수 a의 최솟값은 6이다. 문제 2-2는 원래문제 2의 함수 $f(x)$에서 제시되는 범위가 변화하였으며 동시에 함수 $f(x)$도 변화하였다. 하지만 풀이 구조는 원래문제 2와 유사하다.

다음으로 $a \geq 8$이 사용되는 경우, 즉 $a \log_4 2 \geq 4$일 때에는 $-1 \leq x < 6$에서의 함수식을 바꾸는 것을 고려하자. 원래문제 2에서 $-1 \leq x < 6$에서의 $f(x)$를 y축 방향으로 -1만큼 평행이동 하여 $f(x) = -x^2 + 6x - 1$을 얻어 $f(1) = 4$가 되도록 하고, 문제에서 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 4가 되도록 하면 다음 문제 2-3과 같다.

문제 2-3. 양수 a에 대하여 $x \geq -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 1 & (-1 \leq x < 6) \\ a \log_4(x-5) & (x \geq 6) \end{cases}$$

이다. $t \geq 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1, t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 4가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오.

$f(7) \geq 4$이므로 $a \log_4(7-5) \geq 4$ 이므로 $a \geq 8$이다. 따라서 양수 a의 최솟값은 8이 된다. 하지만 문제 2-3에서의 $f(x)$는 $x = 6$에서 불연속이다. 원래문제 2에서 $f(x)$가 $x \geq -1$에서 연속이었던 점을 반영하여 $x \geq 6$에서의 함수 $f(x)$도 y축 방향으로 -1만큼 평행이동하면 다음과 같은 문제 2-4를 제시할 수 있다.

문제 2-4. 양수 a에 대하여 $x \geq -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 1 & (-1 \leq x < 6) \\ a \log_4(x-5) - 1 & (x \geq 6) \end{cases}$$

이다. $t \geq 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1, t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 4가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오.

$f(7) \geq 4$이므로 $a \log_4(7-5) - 1 \geq 4$ 이므로 $a \geq 10$이다. 따라서 양수 a의 최솟값은 10이 된다. 문제 2-4는 단순히 원래문제 2의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 함수를 이용한 것으로, 원래문제 2의 답과 같고 풀이 구조가 유사하다.

이제 하위구조2에서 $x \geq 6$에 대해 함수 $f(x)$가 밑이 1보다 큰 로그함수로 제시되어 증가함수임을 이용하는 부분에서 다른 증가함수를 고려해 보자. 즉, 하위구조2를 DPC

1단계로 하자. 먼저 일차함수가 제시되는 상황을 살펴본다. a는 양수이고 하위구조3에서 $a \geq 10$이 되는 것을 유지하려면 제시하고자 하는 새로운 증가함수는 점 $(6, 0)$을 지나는 일차함수이므로 $f(x) = m(x-6)$의 형태이다. $a \geq 10$를 얻고자 하므로 원래문제 2처럼 $f(7) \geq 5$이어야 조건을 만족한다. $\frac{a}{2} \geq 5$에 의해 $m = \frac{a}{2}$인 경우, 즉 $f(x) = \frac{a}{2}(x-6)$를 제시하여 문제 2-5를 얻을 수 있다. 또한 이와 유사하게 $x \geq 6$에 대한 함수 $f(x)$를 이차함수로 제시하는 문제 2-6을 생각해 볼 수 있다.

문제 2-5. 양수 a에 대하여 $x \geq -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x & (-1 \leq x < 6) \\ \frac{a}{2}(x-6) & (x \geq 6) \end{cases}$$

이다. $t \geq 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1, t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오.

문제 2-6. 양수 a에 대하여 $x \geq -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x & (-1 \leq x < 6) \\ \frac{a}{2}(x-6)^2 & (x \geq 6) \end{cases}$$

이다. $t \geq 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1, t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오.

문제 2-5와 문제 2-6은 $a \geq 10$이므로 조건을 만족하는 양수 a의 최솟값은 10이 되어 원래문제 2의 결과와 동일하다. 이 두 문제는 원래문제 2의 하위구조2에서 원래문제 2에서 제시된 $x \geq 6$에 대한 함수 $f(x)$가 증가함수임을 유지한다.

(3) 원래문제 3

원래문제 3. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 6x + 1 & (x \leq 2) \\ a(x-2)(x-b) + 9 & (x > 2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k) + \lim_{t \to k-} g(t) + \lim_{t \to k+} g(t) = 9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은? (2024학년도 수능 수학 14번)

원래문제 3에서 $x \leq 2$일 때, $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ 이므로 $f'(x) = 6x^2 - 6$이다. 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 증감표로 나타내면 표 3과 같다.

표 3. 증감표

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5

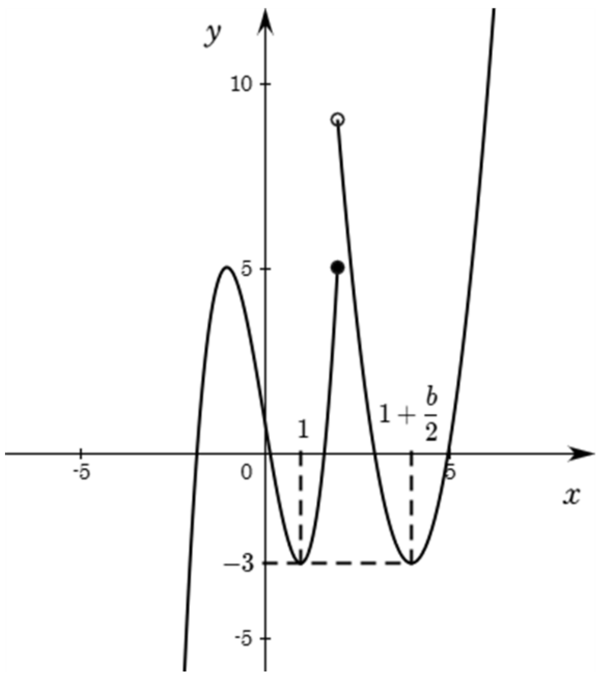

그림 2. 함수 그래프의 개형

a, b가 자연수이므로 곡선 $y = a(x-2)(x-b)+9$ 는 점 $(2,9)$와 점 $(b,9)$ 를 지나는 아래로 볼록한 포물선이다. b는 자연수이므로 (i) $b = 1$ 또는 $b = 2$일 때, (ii) $b \geq 3$일 때, 두 경우로 나눌 수 있다.

(i) $b = 1$ 또는 $b = 2$일 때, $-3 < k < 5$인 실수 k에 대해 $g(k)$, $\lim\limits_{t \to k-} g(t)$, $\lim\limits_{t \to k+} g(t)$가 모두 3이므로 $g(k) + \lim\limits_{t \to k-} g(t) + \lim\limits_{t \to k+} g(t) = 9$인 실수 k의 개수가 무수히 많다.

(ii) $b \geq 3$일 때, 이차함수 $y = a(x-2)(x-b)+9$는 $x = 1+\frac{b}{2}$에서 최솟값 $f(1+\frac{b}{2})$를 갖는다.

이때, 문제 조건에서 $g(k) + \lim_{t\to k-} g(t) + \lim_{t\to k+} g(t) = 9$를 만족시키는 k가 1개인 경우는 $f(1+\frac{b}{2}) = -3$인 경우뿐이다. 그때, 그래프의 개형을 살펴보면 그림 2와 같다.

$f(1+\frac{b}{2}) = -3$ 에서 $a(\frac{b}{2}-1)(1-\frac{b}{2})+9 = -3$ 이다. $a(b-2)^2 = 48$이고 구하는 두 자연수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b)는 $(48,3), (12,4), (3,6)$이다. 따라서 $a+b$의 최댓값은 $48+3 = 51$이다. 이를 바탕으로 하위구조를 하위구조5까지 나누면 표 4와 같다.

표 4. 원래문제 3의 하위구조

하위구조1	$x \leq 2$일 때, $f(x) = 2x^3 – 6x + 1$의 극값을 통해 그래프의 개형을 파악하고, $x > 2$일 때, $f(x) = a(x-2)(x-b)+9$이므로 곡선 $y = a(x-2)(x-b)+9$의 전체적인 특징을 파악한다.
하위구조2	$b = 1, b = 2, b \geq 3$으로 b의 값에 따라 경우를 나눈다. 또한 b의 범위에 따른 각 경우에 대해 파악한다. 특히 $b \geq 3$일 때, $x > 2$에서 $f(x)$는 $x = 1+\frac{b}{2}$에서 최솟값 $f\left(1+\frac{b}{2}\right)$를 갖는다.
하위구조3	$f\left(1+\frac{b}{2}\right) = -3$인 경우가 문제 상황에 해당함을 발견한다. 즉, $x \leq 2$에서의 함수의 극솟값과 $x > 2$에서의 함수의 최솟값이 동일할 때 문제의 조건을 만족함을 발견한다.
하위구조4	$f\left(1+\frac{b}{2}\right) = -3$에 의해 $a\left(\frac{b}{2}-1\right)\left(1-\frac{b}{2}\right)+9 = -3$이므로 $a(b-2)^2 = 48$임을 통해 구하는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍을 찾는다.
하위구조5	$a+b$의 최댓값을 구한다.

이제 나눈 하위구조에 대해 문제해결의 하위구조 탐구와 새롭게 생성된 문제는 다음과 같다. 먼저 하위구조5를 DPC 1단계로 하는 경우를 살펴본다. 하위구조5에서 문제 조건을 만족하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값을 구하였다. 조건을 만족하는 순서쌍은 총 세 가지로, $(48,3), (12,4), (3,6)$이다.

하위구조 탐구에서 살펴보았듯이 원래문제 3에서 구하고자 하는 바인 하위구조5에서 $a+b$를 이용한 부분을 고려하면 가능한 $a+b$ 값의 모든 경우나 $a+b$의 최솟값을 생각해 볼 수 있다. 이를 이용하여 문제 3-1을 얻을 수 있다.

문제 3-1. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 6x + 1 & (x \leq 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x > 2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k) + \lim_{t \to k-} g(t) + \lim_{t \to k+} g(t) = 9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 (1) 가능한 $a + b$의 모든 값을 구하고, (2) $a + b$의 최솟값을 구하시오.

문제 3-1의 (1)은 원래문제 3에서 조건을 만족하는 두 자연수 a, b의 순서쌍이 $(48, 3)$, $(12, 4)$, $(3, 6)$인 점이 유지된다. 이때, 가능한 $a + b$의 모든 값은 51, 16, 9이다. 마찬가지로 문제 3-1의 (2)는 원래문제 3과 문제해결 구조는 동일하며 구하고자 하는 결론이 최댓값에서 최솟값으로 바뀐 것이다. $a + b$의 최솟값은 $3 + 6 = 9$이다.

문제 3-1은 원래문제 3의 문제해결 구조가 유지되나 구하고자 하는 바만 다르므로 답만 다르다는 것이 특징이다. 즉, 원래문제 3의 하위구조5가 변화하였으나 하위구조1부터 하위구조4까지는 유지된다.

이제 하위구조4를 DPC 1단계로 설정하자. 하위구조4에서 $a(b-2)^2 = 48$임을 이용한 것에서 $a(b-2)^2$를 다른 값으로 바꾸면 원래문제 3에 어떤 영향을 미치는지 알아본다. 첫 번째로 어떤 자연수 α에 대해 $a(1 - \frac{b}{2})^2 = \alpha$로 $a(b-2)^2 = 4\alpha$의 값을 얻으므로 4의 배수인 수 중, $a(b-2)^2 = 36$을 사용하도록 변형하자.

하위구조3에서 $x > 2$에서의 함수의 최솟값이 $x \le 2$에서의 함수의 극솟값과 동일한 경우에 대해 파악한다. 이를 이용하여 문제의 조건을 만족시키는 k 값이 하나일 때를 구한다. $a(b-2)^2 = 36$을 고려하기 위하여 $a(1 - \frac{b}{2})^2 = 9$를 이용하면 된다. 이때, $a(\frac{b}{2} - 1)(1 - \frac{b}{2}) + 9 = 0$을 사용하도록 하자.

원래문제 3에서 범위 $x > 2$에 대한 함수 $f(x)$를 변형하지 않는다면 $x \le 2$에서의 함수의 극솟값이 0이 되어야 한다. 이를 위해 원래문제 3의 범위 $x \le 2$에서의 함수 $f(x)$를 y축 방향으로 3만큼 평행이동 한다면 다음과 같은 새로운 $f(x)$를 얻는다.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 6x + 4 & (x \le 2) \\ a(x-2)(x-b) + 9 & (x > 2) \end{cases}$$

이를 이용하여 문제 3-2를 얻을 수 있다.

문제 3-2. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 6x + 4 & (x \le 2) \\ a(x-2)(x-b) + 9 & (x > 2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k) + \lim_{t \to k-} g(t) + \lim_{t \to k+} g(t) = 9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은?

$x > 2$에서의 함수의 최솟값을 m이라고 한다면, 문제 3-2는 $b \geq 3$이면서 $m = 0$인 경우를 살펴보아야 한다. 그때, $a(b-2)^2 = 36$이므로 가능한 순서쌍 (a, b)는 $(1, 8), (4, 5), (9, 4), (36, 3)$이다. 따라서 $a+b$의 최댓값은 39이다.

다음으로 $a(b-2)^2$의 값이 4의 배수가 아니며 $a(b-2)^2 = ak^2$ (k는 자연수) 형태로 나오는 수를 생각해 보자. $a(b-2)^2 = 25$를 고려하려면 $a(1-\frac{b}{2})^2 = \frac{25}{4}$이어야 한다. $a(1-\frac{b}{2})^2 = \frac{25}{4}$이므로 $a(\frac{b}{2}-1)(1-\frac{b}{2}) = -\frac{25}{4}$이다. 원래문제 3에서 $x \leq 2$ 범위에 해당하는 $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$를 변형하지 않는다면 $-\frac{25}{4} + t = -3$에 의해 $t = \frac{13}{4}$을 사용하여 범위 $x > 2$의 함수식을 $f(x) = a(x-2)(x-b) + \frac{13}{4}$으로 수정해야 한다. 이를 통해 새로운 함수 $f(x)$를 얻을 수 있다.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 6x + 1 & (x \leq 2) \\ a(x-2)(x-b) + \frac{13}{4} & (x > 2) \end{cases}$$

또한 이 변화는 $b \geq 3$이어야 한다는 것을 발견하는 하위구조2에 영향을 주지 않으므로 $a(b-2)^2 = 25$를 만족하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(1, 7)$, $(25, 3)$이다. 이때, 조건을 만족하는 $a+b$의 최댓값은 28이다. 이를 이용하여 문제 3-3을 생각해 보자.

문제 3-3. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 6x + 1 & (x \leq 2) \\ a(x-2)(x-b) + \frac{13}{4} & (x > 2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k) + \lim_{t \to k-} g(t) + \lim_{t \to k+} g(t) = 9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은?

문제 3-3에서는 하위구조5에서 조건을 만족하는 $a+b$의 최댓값을 구하는 것이 유지된다. 하지만 하위구조4에서 변화가 일어나 원래문제3의 함수 $f(x)$가 바뀌었다고 볼 수 있다.

이번에는 하위구조4의 $a(b-2)^2$ 대신 $a(b-1)^2$을 사용하도록 변형해 보자. 그중에서 특히 $a(b-1)^2 = 12$라는 값이 나오도록 하자. 그때 $f(1+b) = -3$을 찾으면 $a(b-1)^2 = 12$을 이용할 수 있다. 원래문제 3에서는 $x > 2$일 때의 함수를 살펴보면 $x = 1 + \frac{b}{2}$에서 최솟값을 가졌으나 이 경우에서는 $x = 1 + b$에서 최솟값을 가지면 된다.

이를 통해 $x > 2$일 때, $f(x) = a(x-2)(x-2b)+9$라는 새로운 함수를 고려해 볼 수 있다. 이렇게 문제 3-4를 얻을 수 있다.

문제 3-4. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 6x + 1 & (x \le 2) \\ a(x-2)(x-2b)+9 & (x > 2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k) + \lim_{t \to k-} g(t) + \lim_{t \to k+} g(t) = 9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a + b$의 최댓값은?

문제 3-4를 원래문제 3의 $f(x)$와 비교하자면 원래문제 3의 $f(x)$에서 b가 $2b$로 변경된 것이다. 곡선 $y = a(x-2)(x-2b)+9$를 살펴보면 $(2, 9), (2b, 9)$를 지나는 아래로 볼록한 포물선이다. 이때, 원래문제 3처럼 b가 자연수라는 조건은 유지되지만 $1+b > 2$이어야 하므로 원래문제 3의 $b \ge 3$이라는 조건이 $b \ge 2$라는 조건으로 변화한다. 또한 $f(1+b) = -3$이어야 하므로 $a(b-1)^2 = 12$이다. 가능한 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)는 $(12, 2), (3, 3)$이다. 따라서 $a + b$의 최댓값은 14이다.

다음으로 $a(b-1)^2 = 12$을 이용하되 최솟값을 갖는 위치를 $x = b$가 되도록 변형하자. 그럼 $y = a(x-1)(x+1-2b)+9$를 생각해 볼 수 있고, 이 곡선은 $(1, 9), (2b-1, 9)$를 지나는 아래로 볼록한 포물선이다. 이는 문제 3-4의 $f(x)$를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동 한 것과 연결할 수 있다. 이를 이용하여 $x \le 1, x > 1$의 범위로 나눈다면 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} 2(x+1)^3 - 6(x+1) + 1 & (x \le 1) \\ a(x-1)(x+1-2b)+9 & (x > 1) \end{cases}$$

를 생각해 볼 수 있고 이를 정리하면 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 6x^2 - 3 & (x \le 1) \\ a(x-1)(x+1-2b)+9 & (x > 1) \end{cases}$$

이를 통해 문제 3-5를 얻을 수 있다.

문제 3-5. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 6x^2 - 3 & (x \le 1) \\ a(x-1)(x+1-2b)+9 & (x > 1) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k) + \lim_{t \to k-} g(t) + \lim_{t \to k+} g(t) = 9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a + b$의 최댓값은?

문제 3-5에서는 원래문제 3의 하위구조를 참고하면 $b > 1$이어야 하고 $f(b) = -3$이어야 함을 알 수 있다. 따라서 $a(b-1)^2 = 12$이어야 한다. 문제 3-4의 결과와 같아지므로 가능한 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)는 $(12, 2), (3, 3)$이다. 따라서 $a + b$의 최댓값은 14이다.

마지막으로 하위구조3을 DPC 1단계로 한다면, 하위구조3에서 각 범위에서의 극솟값과 최솟값이 같은 경우가 극댓값과 최댓값이 같은 경우로 변화하는 경우 원래문제 3이 어떻게 변화하는지 확인한다. 먼저 원래문제 3의 함수 $f(x)$가 x축에 대해 대칭시키는 경우를 생각해 볼 수 있다. 원래문제 3의 함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 6x + 1 & (x \le 2) \\ a(x-2)(x-b) + 9 & (x > 2) \end{cases}$$

이 함수 $f(x)$를 x축에 대해 대칭시키면 다음과 같은 새로운 $f(x)$를 얻을 수 있다.

$$f(x) = \begin{cases} -2x^3 + 6x - 1 & (x \le 2) \\ -a(x-2)(x-b) - 9 & (x > 2) \end{cases}$$

이를 이용하여 문제 3-6을 생각해 볼 수 있다.

문제 3-6. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} -2x^3 + 6x - 1 & (x \le 2) \\ -a(x-2)(x-b) - 9 & (x > 2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k) + \lim_{t \to k-} g(t) + \lim_{t \to k+} g(t) = 9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a + b$의 최댓값은?

문제 3-6도 원래문제 3의 해결구조와 유사하게 따르므로 $b \ge 3$이면서 $f(1+\frac{b}{2}) = 3$인 경우를 찾으면 된다. 즉, $-a(\frac{b}{2}-1)(1-\frac{b}{2})-9 = 3$이므로 원래문제 3처럼 $a(b-2)^2 = 48$을 만족하는 두 자연수 a, b를 찾으면 된다. 따라서 원래문제 3과 같게 $a+b$의 최댓값은 $48 + 3 = 51$이다.

3.2. 결론 및 제언

본 연구에서는 대학수학능력시험 기출문제를 대상으로 연역적 문제만들기를 적용하여 함수 그래프의 특성이 사용되는 세 문제에 대해 새로운 문제 6개를 각각 생성하였다. 그 결과로 첫째, 하위구조를 문제의 성격에 따라 세분화할 수 있음을 확인하였다. 본 연구에서는 새롭게 얻어지는 것에 대해 초점을 맞추어 하위구조를 나누었으며 이를 통해 문제에 따라 적절히 하위구조를 나누어 연역적 문제만들기를 수행하였고 그 내용을 제시하였다. 또한 하위구조의 변화가 문제에 미치는 영향을 파악하고 새롭게 만든 문제들 사이의 관계를 살펴보았다.

둘째, 연역적 문제만들기를 통해 주어진 문제의 구조를 깊게 이해하는 데에 도움을 준다. [2]에서는 문제가 만들어지는 과정에서는 문제의 구조를 확실하게 이해하는 과정이 필요하고 이를 바탕으로 문제가 만들어지는 요소와 원리를 알게 되는 기회가 된다고 하였다. 연역적 문제만들기를 수행하기 위해서는 원래문제의 문제해결 단계를 살펴보고 하위구조를 분류한 뒤, 각 단계에서 수행되는 내용이 무엇인지 분석하는 것이 선행되어야 한다. 본 연구에서는 하위구조 탐구를 통해 가능한 변화와 각 변화가 어떤 영향을 주는지 살펴보았다. 따라서 연역적 문제만들기는 원래문제의 구조를 심층적으로 파악하는 기회가 될 것이다.

본 연구는 대학수학능력시험에서 함수 그래프의 특성과 관련된 문제를 통해 연역적 문제만들기의 구체적 방안을 제안하였다는 점에서 의의가 있다. 다만 본 연구에서 변형으로 제시한 각 문제는 연역적 문제만들기 방안 활용의 일부라는 연구의 제한점이 존재한다. 또한 학습자에게 연역적 문제만들기 적용하였을 때, 수학적 창의성, 정의적 영역 등에 어떤 영향을 미치는지에 대한 후속 연구가 요구된다. 이를 통해 연역적 문제만들기의 활용을 구체화하고 더 나아가 학교 현장에서의 연역적 문제만들기 교육적 적용을 기대해 볼 수 있을 것이다.

References

1. Brown S., & Walter M. (1990). *The art of problem posing.* Lawrence Erlbaum Associates Inc.
2. Han, I. (2001). A Study on the Structure of Mathematical Problems. *Communications of Mathematical Education, 11*, 279-290.
3. Han, I. (2020). *Learning polynomials and knowing mathematics.* Kyowoo.
4. Han, I., Heo, E., & Seo, E. (2023). A Concretization and Application of Deductive Problem Making Method. *Communications of Mathematical Education, 37*(4), 653-674.
5. Han, I. (2024). A Making Triangle Construction Problems Using Deductive Problem Making Method. *Communications of Mathematical Education, 38*(4), 609-630.

6. Heo, E. (2025). Deductive Problem Making for a Distribution Type Problem on Combination with Repetition. *Theoretical Mathematics and Pedagogical Mathematics, 32*(2), 87-111.
7. KICE. (2014). *A 20-year History of College Scholastic Ability Test: 1994–2013.* https://www.kice.re.kr/upload/brochureBoard/5/2015/06/suneung_20.pdf
8. KICE. (2023). *College Scholastic Ability Test (2024).* https://www.suneung.re.kr/boardCnts/fileDown.do?fileSeq=23bed50b6f952ec50a0e40f376fdb358
9. KICE. (2024). *College Scholastic Ability Test (2025).* https://www.suneung.re.kr/boardCnts/fileDown.do?fileSeq=20b8f2daf89db9ff668b257f6b51ea75
10. Ministry of Education. (2022). *Mathematics curriculum.* Ministry of Education No. 2022-33 [Separate Book 8]. https://ncic.re.kr/dwn/ogf/inventory.cs
11. Silver, E. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics, 14*, 19-28.
12. Silver, E. (2013). Problem-Posing Research in Mathematics Education: Looking Back, Looking Around, and Looking Ahead. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 157-162.

[a]Minyeong, Ryu, Teacher, Gyeongnam Marine Science High School, Namhae, Korea:
Email address: yeong0891@naver.com