

미지수가 2개인 일차방정식 $r_1x + r_2y = c$ 꼴의 한 해를 찾는 일반화된 방법 탐구
A GENERALIZED METHOD FOR FINDING A PARTICULAR
SOLUTION OF THE LINEAR DIOPHANTINE EQUATION

$$r_1x + r_2y = c$$

서보억^{a,*}

ABSTRACT. This study aimed to investigate a generalized method for finding one integer solution to a linear equation in two variables of the form $r_1x + r_2y = c$. In school mathematics, solving linear equations in two variables is an important topic, and in number theory this problem is closely related to linear Diophantine equations. However, textbooks do not usually present a systematic method for obtaining a particular integer solution. To address this limitation, this study focused on the case where $(r_1, r_2) = g$ and $g \mid c$, and explored a generalized formula based on the simple continued fraction expansion of r_1/r_2 . First, cases with $n = 0, 1, 2, 3$ were analyzed inductively to identify a recurring pattern. Then, this pattern was generalized into a recursive formula for generating one integer solution and justified by mathematical induction. The study also showed that the procedure can be explained structurally through matrix representation. The findings indicate that one integer solution can be obtained systematically from the coefficients of the continued fraction, and that the method can be applied to both middle school textbook problems and university-level number theory examples. Thus, this study provides a meaningful link between school mathematics and number theory.

1. 서론

수학과 교육과정을 보면, 중학교 학교수학에서 미지수가 2개인 일차방정식은 제1차 교육과정에서부터 지금까지 변함없이 다루어지는 학습요소 중의 하나이다([7], [18]). 제1차 수학과 교육과정에서부터 제4차 수학과 교육과정까지는 ‘이원일차방정식’이라는

Received by the editors April 20, 2026. Revised May 18, 2026. Accepted May 20, 2026.

2020 *Mathematics Subject Classification.* 97I30.

Key words and phrases. linear equation in two variables, linear Diophantine equation, integer solution, continued fraction, mathematical induction

주요어: 미지수가 2개인 일차방정식, 부정방정식, 정수해, 연분수, 수학적 귀납법

본 연구는 충남대학교 학술연구비에 의해 지원되었음(This work was supported by research fund of Chungnam National University).

*Corresponding author.

© 2026 Korean Soc. Math. Edu.



용어([11], [12], [13], [14])로, 그 이후에는 현재와 같은 미지수가 2개인 일차방정식으로 다루어졌다([1], [2], [3], [4], [5], [6], [15]).

미지수가 2개인 일차방정식을 중학교 수학교과서에서 다루는 방식은 6차 수학과 교육과정 이래 현재까지 교과서에서 거의 동일한 방식으로 다루어지고 있다([8], [9], [16], [17], [21]). 중학교 2학년 수학 교과서에서 다루는 방식을 정리하면 아래 세 단계와 같다.

1단계. 미지수가 2개인 일차방정식의 의미 설명하기.

일반적으로 미지수가 2개인 일차방정식은

$$ax + by + c = 0 \quad (a, b, c \text{는 수}, a \neq 0, b \neq 0)$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

그림 1. 방정식의 의미 설명([9])

2단계. 미지수가 2개인 일차방정식 $ax + by + c = 0$ 에서 x, y 가 자연수일 때를 예로 하여 참이 되게 하는 x, y 값을 일차방정식의 해로 정의하기.

x, y 의 값이 자연수일 때, 미지수가 2개인 일차방정식 $x + 2y = 9$ 를 참이 되게 하는 x, y 의 값을 구해 보자.

이때 y 의 값도 자연수이어야 하므로 일차방정식 $x + 2y = 9$ 를 참이 되게 하는 x, y 의 값을 순서쌍 (x, y) 로 나타내면

$$(1, 4), (3, 3), (5, 2), (7, 1)$$

이다.

이와 같이 미지수가 x, y 인 일차방정식을 참이 되게 하는 x, y 의 값 또는 순서쌍 (x, y) 를 그 일차방정식의 해 또는 근이라 하고, 일차방정식의 해를 모두 구하는 것을 방정식을 푼다고 한다.

그림 2. 해의 의미 설명([9])

3단계. x, y 가 자연수일 때, 미지수가 2개인 일차방정식 $ax + by + c = 0$ 의 해를 구하는 문제 풀기.

여기서 우리가 주목할 수 있는 것은 미지수가 2개인 일차방정식 $ax + by + c = 0$ 에서 x, y 에 대한 정수해에 집중하고 있다는 점이다. 일반적으로 중학교 2학년에서는 유리수해를 전제로 하지만, 미지수가 2개인 일차방정식에서는 정수해에 초점을 두고

문제 4 x, y 의 값이 자연수일 때, 다음 일차방정식을 풀어라.

(1) $x + y = 4$

x					
y					

(2) $2x + y = 5$

x					
y					

그림 3. 자연수의 해를 구하는 문제([8])

해를 구하고 있다. 이러한 측면에서 중학교에서 학습하는 미지수가 2개인 일차방정식은 일차부정방정식 혹은 디오판토스(Diophantus) 방정식에 연결될 수 있다([19]). 사범대학에서 개설되는 정수론 강좌에서 사용하는 대부분의 교재는 부정방정식의 해를 다음과 같이 제시하고 있다([10], [20]).

일차부정방정식 $ax + by = c$ 에서 $d = (a, b)$ 라 할 때, 정수해가 존재하기 위한 필요충분조건은 $d \mid c$ 이다. 또한, $d \mid c$ 일 때, $ax + by = c$ 의 한 정수해를 (x_0, y_0) 이라고 하면 정수해 x, y 전체는

$$\left(x_0 + \frac{b}{d}t, y_0 - \frac{a}{d}t \right)$$

이다. 단, t 는 정수이다.

중학교 교과서에서의 미지수가 2개인 일차방정식 $ax + by + c = 0$ 의 해를 구하는 것과 정수론 교재에서 다루는 일차부정방정식 $ax + by = c$ 의 모든 정수해를 구하는 것에서 공통적으로 해결해야 할 과제가 있다. 그것은 바로 방정식을 만족하는 한 개의 특수한 정수해를 구하는 것이다. 중학교 교과서에서는 미지수가 2개인 일차방정식 $ax + by + c = 0$ 을 만족하는 특정한 자연수 x, y 를 구해야 하고, 정수론 교재에서는 일차부정방정식 $ax + by = c$ 의 한 정수해 (x_0, y_0) 을 구해야 한다([22]). 중학교 교과서에서는 특수한 한 해를 구하는 일반적인 방법에 대해 다루지 않고, 귀납적인 방법으로 예상과 확인 전략을 사용하여 한 해를 찾고 있다. 일부 정수론 교재에서는 유클리드 호제법에 대한 거꾸로 적용을 통하여 특수한 한 해를 구하는 예시를 제시하지만 학교수학 맥락에서 이를 연분수 계수, 점화식, 행렬 표현과 연결한 일반화된 절차로는 구체적으로 다루지 않고 있다. 이에 본 연구에서는 한 정수해를 찾는 과정을 단순한 시행착오나 개별 예시 풀이에 머무르지 않고, 연분수 전개에서 나타나는 계수들의 규칙성을 바탕으로 일반화된 절차로 공식화하고자 한다.

이에 본 연구에서는 미지수가 2개인 일차방정식의 한 정수해를 구하는 일반화된 방법의 탐색을 연구의 목적으로 설정하였다. 이러한 연구 목적을 이루기 위해 두 정수 r_1, r_2 에 대하여 $g = (r_1, r_2)$ 이고 $g \mid c$ 일 때, $r_1x + r_2y = c$ 의 한 정수해 (x, y) 를 구하는 일반화된 공식에 대해 고찰해 보고자 한다.

2. 연구의 배경

2.1. 일차부정방정식 $r_1x + r_2y = c$ 에서 $p = \frac{r_1}{r_2}$ 의 연분수

두 정수 r_1, r_2 에 대하여 $p = \frac{r_1}{r_2}$ 은 유리수이다. 모든 유리수 p 는 단순연분수

$$p = \langle a_1; a_2, a_3, \dots, a_{n+1} \rangle$$

로 표현할 수 있다([10], [23], [24], [25], [26]). 그 과정은 아래와 같다.

첫째, $r_1 = r_2a_1 + r_3$ 이면,

$$p = a_1 + \frac{r_3}{r_2} = a_1 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}.$$

둘째, $r_2 = r_3a_2 + r_4$ 이면,

$$p = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_4}{r_3}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{r_3}{r_4}}}.$$

셋째, $r_3 = r_4a_3 + r_5$ 이면,

$$p = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{r_5}{r_4}}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\frac{r_4}{r_5}}}}.$$

유사한 방법으로 $r_n = r_{n+1}a_n + r_{n+2}$ 이면,

$$p = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n + \frac{r_{n+2}}{r_{n+1}}}}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{\frac{r_{n+1}}{r_{n+2}}}}}}.$$

마지막으로 $r_{n+1} = r_{n+2}a_{n+1}$ 이면, $(r_1, r_2) = g = r_{n+2}$ 이므로

$$p = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n+1}}}}.$$

결론적으로 모든 유리수 $p = \frac{r_1}{r_2}$ 는 위와 같은 유한연분수로 나타낼 수 있고, 이것을 간단히 $\langle a_1; a_2, \dots, a_n, a_{n+1} \rangle$ 로 나타낸다.

2.2. 일차부정방정식 $r_1x + r_2y = c$ 의 한 해를 찾는 것의 중요성

일차방정식 $r_1x + r_2y = c$ 의 모든 정수해를 구하기 위해서 한 개의 해를 구하는 것이 중요하다. 왜냐하면, 한 해를 구하면 나머지 정수해도 구할 수 있기 때문이다. 실제로 $r_1x + r_2y = c$ 의 해는 직선의 방정식으로 나타나고, 그 해는 일차함수

$$y = -\frac{r_1}{r_2}x + \frac{c}{r_2}$$

의 그래프로 표현된다. 한 해를 구하면 나머지 정수해도 그래프 위에서 구할 수 있다. 예를 들어, $15x + 8y = 1$ 의 해를 찾아보자. 이 일차방정식의 한 정수해는 $(-1, 2)$ 이다.

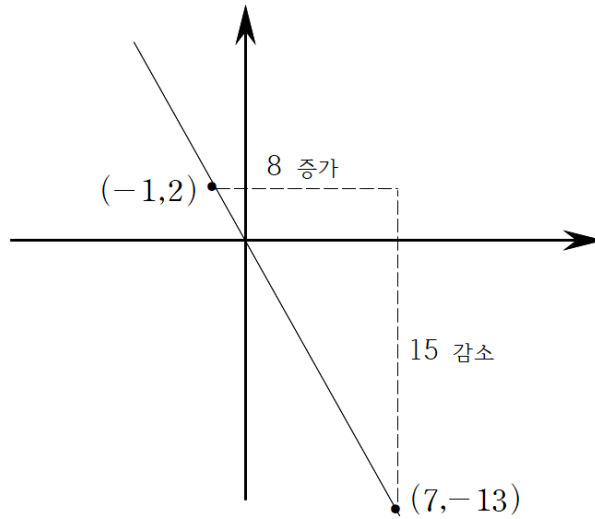


그림 4. $15x + 8y = 1$ 의 해

그런데, 이 그래프가 $15x + 8y = 1$ 의 모든 실수해를 나타내는데, 정수해를 구하기 위해서는 이 직선의 기울기 $-\frac{15}{8}$ 를 고려하면 된다. 위의 그래프에서 보는 것처럼, $(-1, 2)$ 가 해이므로, 기울기에 따라 x 가 8 증가하면 y 가 15 감소한다. 즉, $(7, -13)$ 도 해가 된다. 이와 같은 방법으로 일차방정식의 모든 정수해를 구할 수 있다. 따라서, 일차방정식 $r_1x + r_2y = c$ 의 한 정수해를 알면 다른 모든 정수해도 구할 수 있다.

3. 연구 결과 및 결론

3.1. 귀납적 탐구를 통해 일반화된 방법의 발견

귀납적 탐구 방법을 적용하여 일차방정식 $r_1x + r_2y = c$ 의 한 정수해를 구하기 위한 일반화된 방법을 찾기 위해 $n = 0, 1, 2, 3$ 에 대한 사례를 분석한다. $g \mid c$ 인 경우이므로, $c = g$ 라고 가정하고 탐구를 시작한다.

첫째, $n = 0$ 인 경우. 특별한 경우로 $r_2 \mid r_1$ 이다. $r_1x + r_2y = c$ 의 해를 $S = (x, y)$ 라고 하자. $\frac{r_1}{r_2} = p = \langle a_1 \rangle$, 즉 정수이다. 이 경우에는

$$r_1 = r_2 a_1$$

이 성립한다. 따라서 $r_1 = r_2(a_1 - 1) + r_2$ 이므로,

$$r_1 \cdot 1 + r_2(-a_1 + 1) = r_2$$

이다. 즉,

$$S = (x, y) = (1, -a_1 + 1)$$

이다. 구체적인 예에 적용하면 다음과 같다. $4x + 2y = 2$ 의 한 정수해를 찾아보자. $4 = 2 \times 2 = 2 \times 1 + 2$ 이므로

$$4 \times 1 + 2 \times (-1) = 2$$

이다. 즉, $S = (x, y) = (1, -1)$ 이다.

둘째, $n = 1$ 인 경우. 즉 $(r_1, r_2) = r_3 = c$ 이다. $r_1x + r_2y = c$ 의 해를 $S_1 = (x_1, y_1)$ 이라고 하자. $\frac{r_1}{r_2} = p = \langle a_1; a_2 \rangle$ 이다. 이 경우에는

$$r_1 = r_2 a_1 + r_3, \quad r_2 = r_3 a_2$$

이 성립한다. 따라서

$$r_3 = r_1 \cdot 1 + r_2(-a_1)$$

이다. 즉,

$$S_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = (x_1, y_1) = (1, -a_1)$$

이다.

$S_1 = (x_1, y_1) = (1, -a_1)$ 의 값을 행렬의 연산을 적용하여 보면 다음과 같은 추론이 가능하다. $X_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -a_1 \end{pmatrix}$ 이라고 하고, 행렬 $M_1 = (X_{-1} \ X_0)$ 이라고 하자. 그러면

$$M_1 A_1 = S_1$$

이 성립한다. 실제로

$$M_1 A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a_1 \end{pmatrix} = S_1$$

이다.

구체적인 예에 적용해 보자. $8x + 6y = 2$ 의 한 정수해를 찾아보자. $(8, 6) = 2$ 이고,

$$8 = 6 \times 1 + 2, \quad 6 = 2 \times 3$$

이다. 따라서 $a_1 = 1$ 이다. 위에서 얻은 한 개의 해 $S_1 = (1, -a_1)$ 에 적용하면 한 정수해는

$$S_1 = (x_1, y_1) = (1, -1)$$

이다. $8 \times 1 + 6 \times (-1) = 2$ 가 성립함을 확인할 수 있다.

셋째, $n = 2$ 인 경우. 즉 $(r_1, r_2) = r_4 = c$ 이다. $r_1x + r_2y = c$ 의 해를 $S_2 = (x_2, y_2)$ 이라고 하자. $\frac{r_1}{r_2} = p = \langle a_1; a_2, a_3 \rangle$ 이다. 이 경우에는 다음이 성립한다.

$$r_1 = r_2a_1 + r_3, \quad r_2 = r_3a_2 + r_4, \quad r_3 = r_4a_3.$$

따라서 $r_4 = r_2 \cdot 1 + r_3(-a_2)$ 이므로,

$$r_4 = r_2 \cdot 1 + (r_1 - r_2a_1)(-a_2)$$

이다. 이 식을 정리하면

$$r_4 = r_1(-a_2) + r_2(a_1a_2 + 1)$$

이다. 즉,

$$S_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_2, y_2) = (-a_2, a_1a_2 + 1)$$

이다.

$S_2 = (-a_2, a_1a_2 + 1)$ 의 값을 행렬의 연산을 적용하여 보면 다음과 같은 추론이 가능하다. $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -a_1 \end{pmatrix} = S_1$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$ 이라고 하고, 행렬 $M_2 = (X_0 \ X_1)$ 이라고 하자. 그러면

$$M_2A_2 = S_2$$

이 성립한다. 실제로

$$M_2A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1a_2 + 1 \end{pmatrix} = S_2$$

이다.

구체적인 예에 적용해 보자. $15x + 8y = 1$ 의 한 정수해를 찾아보자.

$$15 = 8 \times 1 + 7, \quad 8 = 7 \times 1 + 1, \quad 7 = 1 \times 7.$$

이다. 따라서 $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ 이다. 위에서 얻은 한 개의 해 $S_2 = (-a_2, a_1a_2 + 1)$ 에 적용하면 한 정수해는

$$S_2 = (x_2, y_2) = (-1, 2)$$

이다. $15 \times (-1) + 8 \times 2 = 1$ 이 성립함을 확인할 수 있다.

넷째, $n = 3$ 인 경우. 즉 $(r_1, r_2) = r_5 = c$ 이다. $r_1x + r_2y = c$ 의 해를 $S_3 = (x_3, y_3)$ 이라고 하자. $\frac{r_1}{r_2} = p = \langle a_1; a_2, a_3, a_4 \rangle$ 이다. 이 경우에는 다음이 성립한다.

$$r_1 = r_2a_1 + r_3, \quad r_2 = r_3a_2 + r_4, \quad r_3 = r_4a_3 + r_5, \quad r_4 = r_5a_4.$$

따라서 $r_5 = r_3 \cdot 1 + r_4(-a_3)$ 이므로,

$$r_5 = r_3 \cdot 1 + (r_2 - r_3a_2)(-a_3)$$

이고, 이를 정리하면

$$r_5 = r_2(-a_3) + r_3(1 + a_2a_3)$$

이다. 또한 $r_3 = r_1 - r_2a_1$ 이므로

$$r_5 = r_1(1 + a_2a_3) + r_2(-a_1 - a_3 - a_1a_2a_3)$$

이다. 즉,

$$S_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = (x_3, y_3) = (a_2a_3 + 1, -a_1 - a_3 - a_1a_2a_3)$$

이다.

$S_3 = (a_2a_3 + 1, -a_1 - a_3 - a_1a_2a_3)$ 의 값을 행렬의 연산을 적용하여 보면 다음과 같은 추론이 가능하다. $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -a_1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1a_2 + 1 \end{pmatrix} = S_2$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -a_3 \end{pmatrix}$ 이라고 하고, 행렬 $M_3 = (X_1 \ X_2)$ 라고 하자. 그러면

$$M_3A_3 = S_3$$

이 성립한다. 실제로

$$M_3A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -a_2 \\ -a_1 & a_1a_2 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2a_3 + 1 \\ -a_1 - a_3 - a_1a_2a_3 \end{pmatrix} = S_3$$

이다.

구체적인 예에 적용해 보자. $43x + 30y = 1$ 의 한 정수해를 찾아보자.

$$43 = 30 \times 1 + 13, \quad 30 = 13 \times 2 + 4,$$

$$13 = 4 \times 3 + 1, \quad 4 = 1 \times 4.$$

따라서 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ 이다. 위에서 얻은 한 개의 해

$$S_3 = (a_2a_3 + 1, -a_1 - a_3 - a_1a_2a_3)$$

에 적용하면 한 정수해는 $S_3 = (x_3, y_3) = (7, -10)$ 이다. $43 \times 7 + 30 \times (-10) = 1$ 이 성립함을 확인할 수 있다.

다섯째, n 에 대한 일반적인 경우. 즉 $(r_1, r_2) = r_{n+2} = c$ 이다. 먼저 $n = 0$ 인 특별한 경우에 대해 살펴보면, $r_1x + r_2y = c$ 의 해를 $S = (x, y)$ 라고 할 때 $\frac{r_1}{r_2} = p = \langle a_1 \rangle$ 이다.

이 경우 $r_1 = r_2 a_1$ 이므로 $r_1 = r_2(a_1 - 1) + r_2$, 즉 $r_1 + r_2(-a_1 + 1) = r_2$ 이다. 따라서 우리가 구하는 해는 $S = (x, y) = (1, -a_1 + 1)$ 이다.

이제 일반적인 경우에 대해 살펴보자. 즉 $(r_1, r_2) = r_{n+2}$ 인 경우이다. $r_1 x + r_2 y = c$ 의 해를 $S_n = (x_n, y_n)$ 이라고 하자. $\frac{r_1}{r_2} = p = \langle a_1; a_2, a_3, \dots, a_{n+1} \rangle$ 이다. 이 경우에는 다음이 성립한다.

$$r_1 = r_2 a_1 + r_3,$$

$$r_2 = r_3 a_2 + r_4,$$

$$r_3 = r_4 a_3 + r_5,$$

$$\vdots$$

$$r_n = r_{n+1} a_n + r_{n+2},$$

$$r_{n+1} = r_{n+2} a_{n+1}.$$

지금까지의 결과로부터 추측하면, 다음과 같은 일반화된 공식을 정리로 얻을 수 있다.

정리 1. 두 정수 r_1, r_2 에 대하여 $r_1 \geq r_2$ 라고 하자. 일차방정식 $r_1 x + r_2 y = c$ 에서 $(r_1, r_2) = d$ 이고 $d \mid c$ 라 하자. $p = \frac{r_1}{r_2}$ 가 단순연분수

$$p = \langle a_1; a_2, a_3, \dots, a_{n+1} \rangle$$

로 나타내어질 때, $r_1 x + r_2 y = d$ 의 한 정수해를 (x_n, y_n) 이라 하면

$$(x_n, y_n) = (-a_n x_{n-1} + x_{n-2}, -a_n y_{n-1} + y_{n-2})$$

이다. 따라서 $r_1 x + r_2 y = c$ 의 한 정수해는

$$\left(\frac{c}{d} x_n, \frac{c}{d} y_n \right)$$

이다.

구체적으로

$$X_{-1} = \begin{pmatrix} x_{-1} \\ y_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = S_1, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = S_2, \quad \dots, \quad X_{n-1} = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = S_{n-1}$$

이고, $A_n = \begin{pmatrix} 1 \\ -a_n \end{pmatrix}$ 이라고 하자. 행렬

$$M_n = (X_{n-2} \ X_{n-1}) = \begin{pmatrix} x_{n-2} & x_{n-1} \\ y_{n-2} & y_{n-1} \end{pmatrix}$$

을 두면 다음이 성립한다.

$$M_n A_n = X_n = S_n.$$

실제로

$$X_n = \begin{pmatrix} x_{n-2} & x_{n-1} \\ y_{n-2} & y_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_n x_{n-1} + x_{n-2} \\ -a_n y_{n-1} + y_{n-2} \end{pmatrix}.$$

즉, 한 정수해 $S_n = (x_n, y_n) = (-a_n x_{n-1} + x_{n-2}, -a_n y_{n-1} + y_{n-2})$ 이다.

3.2. 발견에 대한 정당화

이제 앞에서 얻은 연산을 쉽게 이해하기 위해 표로 나타내어 정리할 수 있다. $r_1 x + r_2 y = c$ 의 해를 $S_n = (x_n, y_n)$ 이라고 하자. $\frac{r_1}{r_2} = p = \langle a_1; a_2, a_3, \dots, a_{n+1} \rangle$ 인 r_1, r_2 이다.

표 1. 연산표

			$-a_1$	$-a_2$	$-a_3$	$\cdots$	$-a_{n-2}$	$-a_{n-1}$	$-a_n$
x_{n-2}	$x_{-1} = 1$	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = -a_2$	x_3	$\cdots$	x_{n-2}	x_{n-1}	$x_n = -a_n x_{n-1} + x_{n-2}$
y_{n-2}	$y_{-1} = 0$	$y_0 = 1$	$y_1 = -a_1$	$y_2 = a_1 a_2 + 1$	y_3	$\cdots$	y_{n-2}	y_{n-1}	$y_n = -a_n y_{n-1} + y_{n-2}$
X_{n-2}	X_{-1}	X_0	X_1	X_2	X_3	$\cdots$	X_{n-2}	X_{n-1}	X_n

증명. 학교에서 다루는 수학적 귀납법을 이용하여 정당화해 보자. 여기서는 조금 특별한 상황이다. (x_n, y_n) 이 앞의 두 항, 즉 (x_{n-2}, y_{n-2}) 와 (x_{n-1}, y_{n-1}) 에 영향을 받고 있다. 따라서 $n = 1, n = 2$ 일 때 성립함을 보이고, $n = k - 2, n = k - 1$ 에서 성립한다고 가정하였을 때 $n = k$ 일 때 성립함을 보이도록 한다.

첫째, $n = 1, n = 2$ 일 때 성립함을 보이자. 먼저, 표 1에 의해서 $n = 1$ 일 때는 $(x_1, y_1) = (1, -a_1)$ 임을 보이면 된다. $r_1 x + r_2 y = d$ 의 해를 $S_1 = (x_1, y_1)$ 이라고 하자. 여기에서는 $\frac{r_1}{r_2} = p = \langle a_1; a_2 \rangle$ 이다. 이 경우에는

$$r_1 = r_2 a_1 + r_3, r_2 = r_3 a_2$$

이 성립한다. 따라서 $r_3 = r_1 \times 1 + r_2(-a_1)$ 이다. 즉, $(x_1, y_1) = (1, -a_1)$ 이다.

다음으로 $n = 2$ 일 때는 표 1에 의해서 $(x_2, y_2) = (-a_2, a_1 a_2 + 1)$ 을 보이면 된다. $r_1 x + r_2 y = d$ 의 해를 $S_2 = (x_2, y_2)$ 라고 하자. 여기에서는 $\frac{r_1}{r_2} = p = \langle a_1; a_2, a_3 \rangle$ 이다. 이 경우에는

$$r_1 = r_2 a_1 + r_3, \quad r_2 = r_3 a_2 + r_4, \quad r_3 = r_4 a_3$$

이 성립한다. 따라서 $r_4 = r_2 \times 1 + r_3(-a_2)$ 이므로,

$$r_4 = r_2 \times 1 + (r_1 - r_2 a_1)(-a_2).$$

이 식을 정리하면 $r_4 = r_1(-a_2) + r_2(a_1 a_2 + 1)$ 이다. 즉, $(x_2, y_2) = (-a_2, a_1 a_2 + 1)$ 이다.

둘째, $n = k - 2$, $n = k - 1$ 에서 성립한다고 가정하자. 표 1에 의해서 다음을 가정할 수 있다. 먼저 $n = k - 2$ 일 때,

$$S_{k-2} = (x_{k-2}, y_{k-2}) = (-a_{k-2}x_{k-3} + x_{k-4}, -a_{k-2}y_{k-3} + y_{k-4})$$

이고, $\frac{r_1}{r_2} = p = \langle a_1; a_2, a_3, \dots, a_{k-1} \rangle$ 이다. 따라서 다음을 얻을 수 있다.

$$r_1(-a_{k-2}x_{k-3} + x_{k-4}) + r_2(-a_{k-2}y_{k-3} + y_{k-4}) = r_k.$$

또한 $n = k - 1$ 일 때,

$$S_{k-1} = (x_{k-1}, y_{k-1}) = (-a_{k-1}x_{k-2} + x_{k-3}, -a_{k-1}y_{k-2} + y_{k-3})$$

이고, $\frac{r_1}{r_2} = p = \langle a_1; a_2, a_3, \dots, a_k \rangle$ 이다. 따라서 다음을 얻을 수 있다.

$$r_1(-a_{k-1}x_{k-2} + x_{k-3}) + r_2(-a_{k-1}y_{k-2} + y_{k-3}) = r_{k+1}.$$

셋째, $n = k$ 일 때 성립하는지 확인하자. 우리가 보일 것은

$$S_k = (x_k, y_k) = (-a_k x_{k-1} + x_{k-2}, -a_k y_{k-1} + y_{k-2})$$

이다. 여기서 $\frac{r_1}{r_2} = p = \langle a_1; a_2, a_3, \dots, a_{k+1} \rangle$ 이고

$$r_k = r_{k+1}a_k + r_{k+2}, \quad r_{k+1} = r_{k+2}a_{k+1}$$

이므로

$$r_{k+2} = r_k \times 1 + r_{k+1}(-a_k)$$

이다. 위에서 얻은 두 식을 대입하면

$$\begin{aligned} r_{k+2} &= \{r_1 x_{k-2} + r_2 y_{k-2}\} \times 1 + \{r_1 x_{k-1} + r_2 y_{k-1}\} \times (-a_k) \\ &= r_1(-a_k x_{k-1} + x_{k-2}) + r_2(-a_k y_{k-1} + y_{k-2}). \end{aligned}$$

따라서 $S_k = (x_k, y_k) = (-a_k x_{k-1} + x_{k-2}, -a_k y_{k-1} + y_{k-2})$ 이다. 그러므로 수학적 귀납법에 의해 정리가 성립한다. $\square$

이제 앞에서 구한 표의 정당성을 확보하였으므로, 위 표 1을 이용하여 문제를 해결해보자.

첫째, $8x + 6y = 2$ 의 한 정수해를 찾아보자. $\frac{8}{6} = \langle 1; 3 \rangle$ 이다.

			$-a_1 = -1$
x_{n-2}	$x_{-1} = 1$	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$
y_{n-2}	$y_{-1} = 0$	$y_0 = 1$	$y_1 = -1$
X_{n-2}	X_{-1}	X_0	X_1

따라서 $S_1 = X_1 = (x_1, y_1) = (1, -1)$ 이다.

둘째, $15x + 8y = 1$ 의 한 정수해를 찾아보자. $\frac{15}{8} = \langle 1; 1, 7 \rangle$ 이다.

		$-a_1 = -1$	$-a_2 = -1$
x_{n-2}	$x_{-1} = 1$ $x_0 = 0$	1	-1
y_{n-2}	$y_{-1} = 0$ $y_0 = 1$	-1	2
X_{n-2}	X_{-1} X_0	X_1	X_2

따라서 $S_2 = (x_2, y_2) = (-1, 2)$ 이다.

셋째, $43x + 30y = 1$ 의 한 정수해를 찾아보자. $\frac{43}{30} = \langle 1; 2, 3, 4 \rangle$ 이다.

		$-a_1 = -1$	$-a_2 = -2$	$-a_3 = -3$
x_{n-2}	$x_{-1} = 1$ $x_0 = 0$	1	-2	7
y_{n-2}	$y_{-1} = 0$ $y_0 = 1$	-1	3	-10
X_{n-2}	X_{-1} X_0	X_1	X_2	X_3

따라서 $S_3 = (x_3, y_3) = (7, -10)$ 이다.

3.3. 일반화된 방법에 대한 중학교 교과서 및 정수론 교재 실제 적용

이제 중학교 교과서에 나오는 정수해를 구하는 문제 상황에 적용해 보자.

3 x, y 가 자연수일 때, 다음 일차방정식을 푸시오.
 (1) $x + 2y = 5$ (2) $3x + y = 11$

그림 5. 교과서 예시 1([9])

첫째, $x + 2y = 5$ 에 적용해 보자. 이 방정식은 $2y + x = 5$ 로 변형해 보자.

$$\frac{2}{1} = \langle 2 \rangle, \quad (2, 1) = 1.$$

$2 = 1 \times 2 + 0$ 이므로,

$$1 = 2 \times 1 + 1 \times (-1)$$

이다. 따라서

$$5 = 2 \times 5 + 1 \times (-5)$$

이다. 즉, 해는 $(y, x) = (5, -5)$ 이다. 따라서 $(x, y) = (-5, 5)$ 이다. 따라서, 이를 통해 자연수해 $(1, 2)$ 를 구할 수 있다.

4 x, y 가 자연수일 때, 다음 일차방정식을 푸시오.

(1) $x + y = 5$

(3) $3x + y = 9$

(2) $x + 2y = 6$

(4) $3x + 2y = 12$

그림 6. 교과서 예시 2([9])

둘째, $3x + 2y = 12$ 에서 자연수해를 넘어서 정수해를 구하는 것에 적용해 보자.

$$\frac{3}{2} = \langle 1; 2 \rangle, \quad (3, 2) = 1.$$

먼저 $3x + 2y = 1$ 의 해를 구해보자.

		$-a_1 = -1$
x_{n-2}	$x_{-1} = 1 \quad x_0 = 0$	$x_1 = 1$
y_{n-2}	$y_{-1} = 0 \quad y_0 = 1$	$y_1 = -1$
X_{n-2}	$X_{-1} \quad X_0$	X_1

$S_1 = X_1 = (x_1, y_1) = (1, -1)$ 이다. 즉, $3 \times 1 + 2 \times (-1) = 1$ 이다. 이제 $3x + 2y = 12$ 의 해를 구하기 위해서는 해를 12배 하면 된다. $3 \times 12 + 2 \times (-12) = 12$ 이다. 따라서 구하는 해는 $(12, -12)$ 이다.

이제 대학 정수론 교재([20], pp. 30-38)에 나오는 부정방정식의 해를 구하는 문제 상황에 적용해 보자.

첫째, $10x + 7y = 10$ 에 적용해 보자. $\frac{10}{7} = \langle 1; 2, 3 \rangle$ 이고 $(10, 7) = 1$ 이다. 따라서 먼저 $10x + 7y = 1$ 의 해를 구해보자.

		$-a_1 = -1$	$-a_2 = -2$
x_{n-2}	$x_{-1} = 1 \quad x_0 = 0$	1	-2
y_{n-2}	$y_{-1} = 0 \quad y_0 = 1$	-1	3
X_{n-2}	$X_{-1} \quad X_0$	X_1	X_2

$S_2 = (x_2, y_2) = (-2, 3)$ 이다. 즉, $10 \times (-2) + 7 \times 3 = 1$ 이다. 이제 $10x + 7y = 10$ 의 해를 구하기 위해서는 양변에 10을 곱하면 된다. $10 \times (-20) + 7 \times 30 = 10$ 이다. 따라서 구하는 해는 $(-20, 30)$ 이다.

둘째, $222x + 126y = 6$ 에 적용해 보자. $\frac{222}{126} = \langle 1; 1, 3, 5 \rangle$ 이고 $(222, 126) = 6$ 이다. $222x + 126y = 6$ 의 해를 구해보자.

			$-a_1 = -1$	$-a_2 = -1$	$-a_3 = -3$
x_{n-2}	$x_{-1} = 1$	$x_0 = 0$	1	-1	4
y_{n-2}	$y_{-1} = 0$	$y_0 = 1$	-1	2	-7
X_{n-2}	X_{-1}	X_0	X_1	X_2	X_3

$S_3 = (x_3, y_3) = (4, -7)$ 이다. 즉,

$$222 \times 4 + 126 \times (-7) = 6$$

이다.

3.4. 결론

본 연구는 미지수가 2개인 일차방정식 $r_1x + r_2y = c$ 꼴에서 한 정수해를 구하는 일반화된 방법을 탐구하는 데 목적을 두었다. 중학교 학교수학에서는 미지수가 2개인 일차방정식의 해를 구하는 내용을 지속적으로 다루고 있으나, 교과서에서는 주로 특정 자연수해를 예상하고 확인하는 방식에 의존하는 경향이 있다. 또한 정수론 교재에서도 일차부정방정식의 정수해 존재 조건과 일반해는 제시되지만, 이를 위해 선행되어야 하는 ‘한 개의 특수한 정수해’를 구하는 일반적 방법은 충분히 체계화되어 있지 않다. 이러한 문제의식에 기초하여, 본 연구는 일차방정식의 한 정수해를 구하는 방법에 대해 탐구하고 그 결과를 학교수학의 문제와 정수론 교재의 실제 예제에 적용하였다.

이를 위하여 본 연구에서는 두 정수 r_1, r_2 에 대하여 $g = (r_1, r_2)$ 인 경우를 중심으로, 비율 $p = \frac{r_1}{r_2}$ 를 단순연분수로 표현하고 그 전개 과정에서 나타나는 계수들의 규칙성을 분석하였다. 그 결과, 연분수 전개에서 얻어지는 계수들을 이용하여 한 정수해를 점화적으로 생성할 수 있는 일반화된 공식을 도출하였으며, 이를 행렬 표현과 결합하여 체계적으로 설명할 수 있음을 확인하였다. 특히 본 연구에서 제시한 점화 관계는 앞의 두 해를 이용하여 다음 해를 생성하는 구조를 지니며, 이를 통해 한 정수해를 산출하는 절차가 귀납적 탐색의 수준을 넘어 일반화된 알고리즘으로 공식화될 수 있음을 보였다.

또한 본 연구에서는 $n = 0, 1, 2, 3$ 의 구체적 사례를 분석한 뒤, 일반적인 경우로 확장하여 정리하였고, 수학적 귀납법을 활용하여 그 타당성을 정당화하였다. 이 과정에서 한 정수해를 구하는 공식이 단순한 계산 요령이 아니라 연분수, 유클리드 호제법, 점화식, 행렬 연산이 유기적으로 연결된 결과임을 밝힐 수 있었다. 나아가 한 정수해가 구해지면 나머지 모든 정수해 역시 쉽게 구할 수 있다는 점에서, 본 연구에서 탐구한 한 해를 찾는 문제는 일차부정방정식 전체를 이해하는 핵심 단계임을 확인하였다.

본 연구에서 얻은 결론 및 의의는 다음과 같다. 첫째, 학교수학과 정수론을 연결하는 수학적 통로를 마련하였다. 중학교에서 학습하는 미지수가 2개인 일차방정식의 정수해 문제를 대학 수준의 정수론 내용과 연계하여 해석함으로써, 학교수학의 내용이 보다

깊은 수학적 구조와 연결되어 있음을 확인할 수 있었다. 둘째, 기존에 직관적 추측이나 시행착오에 의존하던 한 정수해 탐색 과정을 일반화된 절차로 제시하였다. 셋째, 본 연구에서 제안한 방법이 실제 중학교 교과서의 문제뿐 아니라 정수론 교재의 예제에도 적용 가능함을 보임으로써, 그 수학적 유용성과 교육적 활용 가능성을 함께 확인하였다.

본 연구의 결과는 학교수학에서 미지수가 2개인 일차방정식의 정수해를 구하는 활동이 단순한 값의 대입과 확인을 넘어, 최대공약수, 유클리드 호제법, 연분수, 점화식, 일반화라는 수학적 구조를 탐구하는 활동으로 확장될 수 있음을 보여 준다. 특히 중등학교 심화 탐구 수업이나 예비수학교사 교육에서는 본 연구의 방법을 활용하여 학생들이 개별 사례에서 규칙을 발견하고, 이를 일반화하며, 다시 수학적으로 정당화하는 과정을 경험하도록 할 수 있다. 이 점에서 본 연구는 학교수학과 대학 수준 정수론 사이의 연결 가능성을 제시하고, 계산 절차 중심의 문제 풀이를 구조 이해 중심의 수학 탐구로 전환할 수 있는 교육적 시사점을 제공한다.

본 연구의 결과를 바탕으로 다음과 같은 후속 연구와 교육적 시사점을 제언하고자 한다. 첫째, 본 연구에서 다룬 미지수가 2개인 일차방정식의 논의를 미지수가 3개 이상인 일차방정식으로 확장할 필요가 있다. 특히 $r_1x + r_2y + r_3z = c$ 꼴의 방정식에 대하여 정수해의 존재 조건이 어떠한 방식으로 성립하는지, 그리고 $(r_1, r_2, r_3) = g$ 일 때 $g \mid c$ 가 정수해 존재의 필요충분조건이 되는지를 체계적으로 탐구할 필요가 있다. 더 나아가 미지수가 2개인 경우처럼 한 정수해를 구하는 일반화된 공식이나 절차가 존재하는지 검토함으로써, 다변수 일차부정방정식에 대한 보다 확장된 이론적 틀을 마련할 필요가 있다.

둘째, 연구 범위를 비선형 정수방정식으로 확대할 필요가 있다. 본 연구의 탐구과제에서 제시된 $r_1x + r_2y = c$ 꼴의 방정식은 일차방정식과 달리 정수해의 존재 여부가 최대공약수 조건만으로 결정되지 않으며, 합동식, 이차잉여, 정수의 표현 문제 등 보다 심화된 수론적 논의와 긴밀히 연결된다. 따라서 이러한 방정식에 대해서는 정수해 존재 조건을 체계적으로 분류하고, 특정한 경우에 한 정수해를 찾는 방법을 탐색하는 후속 연구가 필요하다. 이를 통해 일차방정식에서 확인한 일반화의 가능성이 비선형 방정식에서도 어떠한 방식으로 이어질 수 있는지 밝힐 수 있을 것이다.

셋째, 본 연구에서 제안한 방법의 교육적 적용 가능성을 구체화할 필요가 있다. 학교 현장에서는 미지수가 2개인 일차방정식의 해를 구할 때 주로 값을 대입하고 확인하는 수준에 머무르는 경우가 많다. 그러나 본 연구의 결과는 한 정수해를 찾는 과정 속에 연분수, 최대공약수, 점화식, 일반화와 같은 풍부한 수학적 아이디어가 내재되어 있음을 보여 준다. 따라서 중등학교 예비교사 교육이나 심화 탐구 수업에서 본 연구의 아이디어를 활용할 수 있는 교수·학습 자료 및 수업 모형 개발이 필요하다. 이는 학교 수학의 내용을 단순한 계산기술이 아니라 수학적 구조를 탐구하는 활동으로 전환하는 데 기여할 수 있을 것이다.

넷째, 본 연구에서 제시한 일반화된 방법을 알고리즘적 사고와 연계하여 탐구할 필요가 있다. 본 연구의 방법은 연분수 전개, 점화 관계, 반복 계산이라는 절차적 특성을 지니고 있으므로, 이를 컴퓨터 알고리즘이나 프로그래밍 활동으로 구현하는 것이 가능하다. 이러한 확장은 수학적 개념 이해를 심화하는 동시에, 수학과 정보 교육의 융합적 접근에도 기여할 수 있을 것이다.

마지막으로, 본 연구는 귀납적 탐구를 통해 규칙을 발견하고 이를 일반화하며 다시 정당화하는 수학적 사고 과정을 보여 준다는 점에서 의의를 가진다. 따라서 후속 연구에서는 결과로서의 공식뿐 아니라, 그러한 공식을 발견하고 정당화하는 사고 과정 자체를 교수·학습의 관점에서 분석할 필요가 있다. 이는 학생들이 수학을 완성된 지식으로만 받아들이는 것이 아니라, 탐구와 일반화의 과정을 통해 스스로 구성해 가는 학문으로 이해하도록 돕는 데 중요한 시사점을 제공할 것이다.

References

1. 교육과학기술부. (2011). 수학과 교육과정. 교육과학기술부 고시 제2011-361호.
2. 교육부. (1992). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제1992-19호.
3. 교육부. (1997). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제1997-15호.
4. 교육부. (2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2015-74호.
5. 교육부. (2022). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2022-33호.
6. 교육인적자원부. (2006). 수학과 교육과정. 교육인적자원부 고시 제2006-75호.
7. 김남균, 도종훈, 박윤범, 서보억, 김기탁, 박영은, 최인영. (2018). 수학과 교육과정 변천에 대한 분석 연구. 한국과학창의재단 연구보고서.
8. 김원경, 조민식, 방금성, 김수미, 배수경, 오혜정, 지은정, 최형권, 황정하. (2013). 중학교 수학 2. 비상교육.
9. 김원경, 조민식, 방금성, 임석훈, 김동화, 강순자, 배수경, 지은정, 김윤희. (2020). 중학교 수학 2. 비상교육.
10. 김응태, 박승안. (2010). 정수론. 경문사.
11. 문교부. (1955). 수학과 교육과정. 문교부령 제46호.
12. 문교부. (1963). 수학과 교육과정. 문교부령 제120호.
13. 문교부. (1974). 수학과 교육과정. 문교부령 제350호.
14. 문교부. (1981). 수학과 교육과정. 문교부령 제442호.
15. 문교부. (1987). 수학과 교육과정. 문교부 고시 제88-7호.
16. 박두일, 신동선, 강영환, 윤재성, 김인중. (2002). 중학교 수학 8-가. 교학사.
17. 박배훈, 정창현. (1994). 중학교 수학 2. 교학사.
18. 박한식. (1991). 한국수학교육사. 대한교과서주식회사.
19. 서보억. (2014). 중학교 교육과정과 중학교 교직수학의 탐구. 교우사.
20. 신현용. (2009). 교사를 위한 정수론. 교우사.

21. 유희찬, 류성림, 한혜정, 강순모, 제수연, 김명수, 천태선, 김민정. (2010). 중학교 수학 2. 미래엔컬처그룹.
22. 한인기. (2003). 교사를 위한 수학사. 교우사.
23. Apostol, T. M. (1976). *Introduction to analytic number theory*. Springer.
24. Burton, D. M. (2010). *Elementary number theory* (7th ed.). McGraw-Hill.
25. Hardy, G. H., & Wright, E. M. (2008). *An introduction to the theory of numbers* (6th ed.). Oxford University Press.
26. Niven, I., Zuckerman, H. S., & Montgomery, H. L. (1991). *An introduction to the theory of numbers* (5th ed.). Wiley.

^aBO EUK SUH, PROFESSOR, DEPARTMENT OF MATHEMATICS EDUCATION, CHUNGNAM NATIONAL UNIVERSITY:

Email address: eukeuk@cnu.ac.kr