

그래프의 매칭을 활용한 직육면체와 정사각기둥의 전개도 개수 구하기 ENUMERATING THE NETS OF A CUBE AND A SQUARE PRISM USING GRAPH MATCHINGS

이호수^a, 최근배^{b,*}

ABSTRACT. In this paper, we examine the process of mathematization from the instructor's perspective, based on lessons related to the nets of a cube and a regular octahedron for elementary gifted students in an advanced program. Specifically, we investigate how the number of nets considered by students, based on the adjacency and parallelism of faces in the nets (represented respectively by the concepts of trees and partitions of sets), leads to a process of mathematization by the instructor using the concept of matchings in graphs to determine the number of nets for a rectangular prism and a square prism.

1. 서론

전개도는 초등학교 수학 교육과정에서 꾸준히 다루어져 온 핵심적인 학습 주제 중 하나로, 입체도형에 대한 개념 형성과 더불어 다양한 수학적 능력을 신장시키는 데 중요한 역할을 해왔다. 특히, 전개도는 입체도형을 평면 위에 펼쳐서 나타낸 도형으로, 3차원 공간에 존재하는 입체적인 구조물을 2차원의 평면으로 변환해 표현하는 과정을 포함한다. 이 과정에서 학생들은 도형을 머릿속으로 조작해 보거나, 전개도를 실제로 접어서 입체로 구성해 보면서 공간 시각화(spatial visualization, [12], [9], [3]) 능력을 자연스럽게 키울 수 있다. 또한 도형의 전개 및 조합 과정을 추론해 나가는 과정에서 논리적 사고력, 문제 해결력, 수학적 추론 능력 등 고차원적인 인지 기능도 함께 발달하게 된다.

이에 대해 Seo & Lee([12])는 오늘날과 같이 공간 능력의 중요성이 점점 부각되고 있는 교육적 환경에서, 전개도가 매우 유의미하고 효과적인 학습 소재가 될 수 있음을

Received by the editors April 14, 2026. Revised May 2, 2026. Accepted May 6, 2026.

2020 *Mathematics Subject Classification.* 97D50, 97K30.

Key words and phrases. Freudenthal's mathematising, net, graph, graph matching

주요어: Freudenthal의 수학적화, 전개도, 그래프, 그래프 매칭

이 논문은 2026학년도 제주대학교 교원성과지원사업에 의하여 연구되었음

*Corresponding author.

© 2026 Korean Soc. Math. Edu.



강조하였다. 또한 Chung & Kim([1])은 학교 수학에서 전개도의 활용이 다소 단편적이고 제한적인 수준에 머물러 있다는 점을 지적하였다. 즉, 전개도는 교육적으로 다양한 가능성을 지니고 있음에도 불구하고, 실제 수업에서는 단순히 입체도형의 구성이나 표면의 넓이 계산 등에만 활용되는 경우가 많아, 그 안에 내포된 교수학적 가치가 충분히 반영되지 못하고 있다는 것이다. 이러한 점에서 전개도를 보다 풍부하고 통합적인 시각에서 접근할 필요성이 제기되며, 교사에 의한 교수학적 변환(didactic transposition, [8])과 관련된 능력이 요구된다.

전개도는 단순한 도형 학습의 도구가 아니라, 학생들의 전반적인 공간 능력과 수학적 사고력을 기르는 데 매우 효과적인 학습 매개체이며, 이를 보다 심화된 방식으로 활용하고, 다양한 형태의 교육 현장에서 적용 가능성을 모색해보는 것이 필요하다. 전개도와 관련된 선행연구는 주로 학생들의 반응을 분석하는 연구 또는 교과서의 비교연구이다([2], [11], [12]). 선행 연구 중에서, Lee & Song([11])는 정규교육과정의 내용인 직육면체의 전개도를 심화시킨 소재를 바탕으로 영재학급 학생들을 대상으로 한 학습 자료 개발과 적용에 관한 연구이다.

이 논문에서는 영재 학급의 심화 또는 사사과정에서 다루어 질 수 있는 심화된 전개도와 관련된 내용을 수학화의 관점에서 고찰하고자 한다. 즉, 전개도를 어떻게 진보된 수학적 개념으로 조직할 것인가에 대해 고찰하고자 한다. 수학화는 프로이덴탈의 관점에서 간단히 ‘현상에 질서를 부여하는 활동’을 의미한다([5]). 여기서 ‘현상’이란 이미 가지고 있는 전개도와 관련된 지식이고 ‘질서’는 수학적으로 형식화를 할 수 있는 수단을 의미한다. 이 논문에서는 학생들과의 수업과정에 나타난 현상을 바탕으로 교수자의 입장에서의 수학화의 과정을 담고 있다.

2. 연구의 배경

2.1. Freudenthal의 수학화 학습지도론에 따른 매칭 개념

Freudenthal의 수학화 학습지도론에 따르면, 형식적인 정의나 설명에 의한 개념 획득보다는 그 개념이 내포된 현상들을 다룸으로써 그 개념을 적용하는 것을 통해 어떤 암묵적인 아이디어가 형성되고 그것이 하나의 정신적인 대상인 심상(mental image)으로 승격하고 이것이 형식화됨으로써 하나의 수학적 개념으로 탄생된다([4], [6]에서 재인용). 이러한 수학화의 관점에서 직육면체의 전개도의 개수를 구하는 문제를 해결하는 과정에서, 연구의 이론적 배경인 그래프의 매칭개념이 도입되는 과정은 다음과 같다. 전개도는 입체도형을 펼쳐서 평면에 나타낸 그림을 말한다. 보통의 경우 모서리를 잘라서 펼친 연결된 도형을 의미한다. 단순히 이야기 하면, 위상적인 관념인 도형의

임시적 절단(temporary cutting, [7], p.24)을 의미한다고 볼 수 있다. 이러한 과정에서 면끼리의 인접성과 평행성은 심상속에 자리잡게 된다. 전개도는 수학적 추상화의 과정(면은 점, 인접한 면은 선)을 통하여, 유한개의 점(vertex)과 점과 점을 이은 유한개의 변(edge)으로 구성된 도형으로 모델화 되며 이러한 도형을 수학적인 용어로 **그래프**(graph)라고 부른다. 실제로, 전개도는 순환길이 없는 연결 그래프인 **나무**(tree, [13], p.39)가 된다. 그래프는 생활 주변에서 발생하는 현상을 수학적 모델링과정에서 자주 나타난다. 예를 들어, 운동경기, 인사하기, 지하철 노선도와 같은 두 대상 사이에서 일어나는 현상을 조직하는 과정에서 볼 수 있다. 한편, 직육면체의 전개도가 나무로 표현되었을 때 나무는 면들의 전개도 상에서의 면들의 ‘인접성’을 표현한 것이다. 그러나 평행인 면과 관련된 정보는 나무에 나타나지 않으며 단지 평행을 담은 꼭짓점끼리의 쌍이라는 개념이 심상속에 자리잡는다. 결국 이러한 직관적인 생각이 그래프에서의 매칭개념으로 발전한다. 그래프에서 **매칭**(matching, [13], p.277)이란 서로 연결되지 않은 변들의 집합을 뜻하며, 모든 꼭짓점들을 포함하는 매칭을 **완전 매칭**(perfect matching)이라 한다.

2.2. 학생의 수학적 과정

정육면체의 전개도와 관련된 학생들의 활동을 요약하면 다음과 같다. 먼저, 정육면체의 전개도를 단순화(면은 점, 인접한 면은 선(변)으로 연결)하면 위수(꼭짓점의 개수) 6인 나무가 된다. 따라서 위수 6인 나무를 모두 찾고, 그 중 전개도로부터 만들어 질 수 없는 나무는 배제한다. 위수 6인 나무는 6개가 있으며, 그림 1의 마지막 나무는 전개도와 관련이 없다.

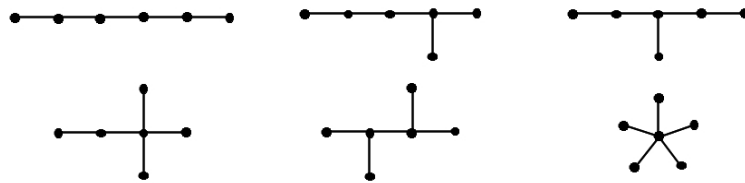


그림 1. 위수 6인 나무

두 번째, 앞서 찾은 6개의 나무의 꼭짓점에 1부터 6까지의 숫자를 부여하고 면의 평행성을 결정하기 위하여 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 을 두 개씩 3쌍으로 분할하는 활동을 한다(표 1의 가능한 3-분할 참조).

세 번째, 각각의 나무와 표 1의 3-분할을 적용하여 가능한 평행 쌍을 구한다. 예를 들어, 표 1의 가능한 평행 쌍 여부의 결정은 그림 2의 나무를 적용한 경우다.

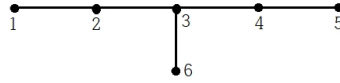


그림 2. 라벨을 가지는 나무

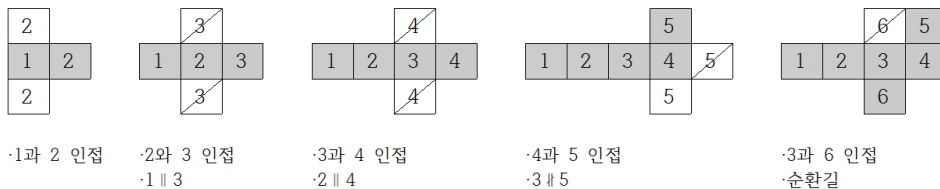
표 1. 가능한 3-분할과 평행 쌍 여부

연번	가능한 3-분할	가능한 평행 쌍 여부
1	{1, 2}, {3, 4}, {5, 6}	불가능
2	{1, 2}, {3, 5}, {4, 6}	불가능
3	{1, 2}, {3, 6}, {4, 5}	불가능
4 ¹⁾	{1, 3}, {2, 4}, {5, 6}	가능
5	{1, 3}, {2, 5}, {4, 6}	가능
6	{1, 3}, {2, 6}, {4, 5}	불가능
7	{1, 4}, {2, 3}, {5, 6}	불가능
8	{1, 4}, {2, 5}, {3, 6}	불가능
9	{1, 4}, {2, 6}, {3, 5}	가능
10	{1, 5}, {2, 3}, {4, 6}	불가능
11	{1, 5}, {2, 4}, {3, 6}	불가능
12	{1, 5}, {2, 6}, {3, 4}	불가능
13	{1, 6}, {2, 3}, {4, 5}	불가능
14	{1, 6}, {2, 4}, {3, 5}	가능
15	{1, 6}, {2, 5}, {3, 4}	불가능

끝으로, 나무의 인접성과 분할의 평행성을 사용하여 전개도를 그린다. 여기서 전개도의 중복성(면의 라벨을 무시)이 생길 수 있음에 유의해야 한다²⁾.

이러한 사사과정 학생(중학교 1학년)들의 정육면체의 전개도와 관련된 수학화의 과정을 요약하면 그림 3과 같다.

¹⁾연번 4의 전개도 그리기



²⁾표 1에서 연번 14의 전개도는 아래와 같은데, 이 전개도는 연번 4의 전개도와 같다.

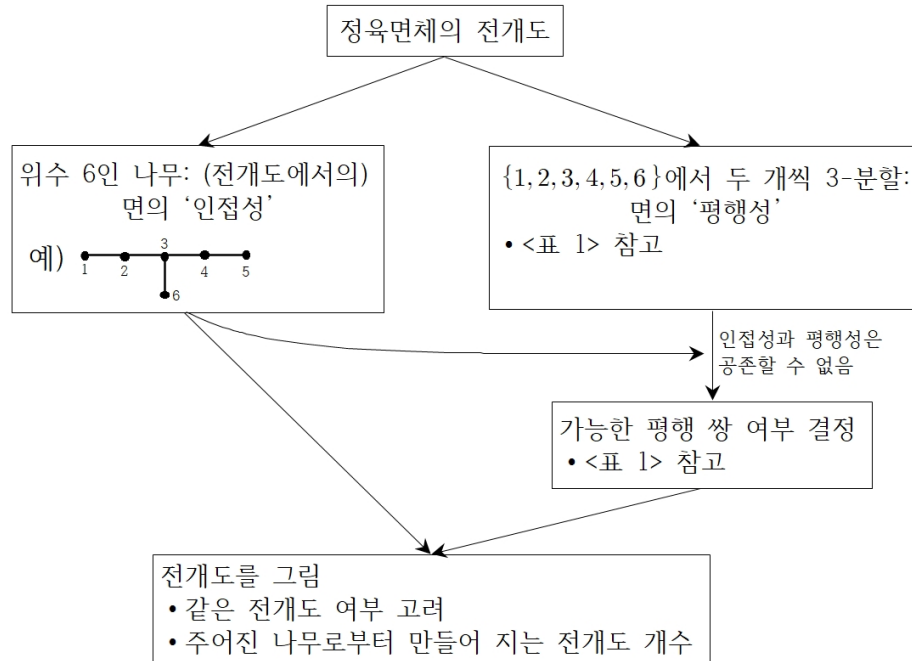


그림 3. 학생들의 수학화 과정

3. 연구 결과 및 결론

3.1. 교수자 입장에서의 수학화

사사과정 학생들과의 수업활동 후 교수자의 입장에서 수업을 반성하는 관점에서 좀 더 진보된 수학화를 생각해보게 되었다. 전개도에서 면의 인접성을 나타내는 나무와 면의 평행성을 보여주는 모임의 분할을 동시에 생각할 수 없을까?라는 의문을 가지게 되었다. 이러한 의문으로부터 그림 4와 같이 나무에 평행성을 나타내는 3개의 변이 첨가된 그래프를 고려하게 되었다.

새롭게 만들어진 그래프는 전개도에서 면의 인접성과 평행성 모두의 정보를 포함하고 있다. 이렇게 만들어진 그래프에서 완전 매칭(perfect matching)의 개수로부터

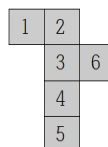




그림 4. 나무로부터 만들어진 단순 그래프

전개도의 개수를 찾는 방법을 고찰한다. 먼저, 위수 6인 나무에 3개의 변이 추가된 모든 그래프를 생각한다. 둘째, 이렇게 만들어진 그래프에서 모든 완전 매칭을 생각하고 전개도와 관련성을 고찰한다.

1) 정육면체

차수열³⁾에 따른 위수 6인 나무를 분류하면 표 2와 같다.

표 2. 차수열에 따른 위수 6인 나무의 분류

차수열(d)	나무
$d = (1, 1, 2, 2, 2, 2)$	
$d = (1, 1, 1, 2, 2, 3)$	
$d = (1, 1, 1, 1, 2, 4)$	
$d = (1, 1, 1, 1, 3, 3)$	

표 2의 각 나무에서 꼭짓점을 2개씩 짝을 짓는 3쌍의 분할을 생각하고, 주어진 나무에 짝지어진 꼭짓점을 변으로 연결하고, 세 개의 변이 첨가된 그래프를 생각한다. 편의상, 이 그래프를 나무로부터 유도된 **매칭그래프**(matching graph)라고 하고, 이 경우의 완전 매칭을 나무로부터 유도된 완전 매칭이라고 부르자. 즉, 매칭그래프에서 완전 매칭을 제거한 그래프가 나무가 되는 경우를 의미한다. 이 매칭그래프의 차수열은 나무의 차수열에 1씩 더해진 형태이다(그림 4 참조). 이렇게 만들어진 모든 그래프는 표 3과 같다. 표 3에 있는 그래프는 Wilson & Watkins([13])의 책에 있는 그래프 카드(pp. 19-24)를 참조하였다. 그러나 매칭그래프에서의 모든 완전 매칭이 어떤 나무로부터 유도된 완전 매칭일까?

³⁾그래프에서 주어진 꼭짓점의 차수(degree)는 해당 꼭짓점에 연결된 변(edge)의 개수를 의미하며, 차수열(degree sequence)은 모든 꼭짓점의 차수(degree)를 수열로 표시한 것을 의미한다.

표 3. 표 2의 나무로부터 만들어진 매칭그래프

차수열(d)	매칭그래프
$d = (2, 2, 3, 3, 3, 3)$	
$d = (2, 2, 2, 3, 3, 4)$	
$d = (2, 2, 2, 2, 3, 5)$	
$d = (2, 2, 2, 2, 4, 4)$	

이제, 표 3에 있는 11개 매칭그래프 각각에서의 완전 매칭(perfect matching)을 생각해보자.

표 4. $d = (2, 2, 3, 3, 3, 3)$ 인 매칭그래프의 완전 매칭(점선의 모임)

차수열(d)	매칭그래프	완전 매칭
$d = (2, 2, 3, 3, 3, 3)$		

정육면체의 전개도 관점에서 완전 매칭을 생각해보면, 완전 매칭 중에서 정육면체의 전개도와 관련 될 수 있는 것은 다음의 두 조건을 만족해야 한다.

조건1: 완전 매칭에서 매칭을 제거한 그래프(꼭짓점은 남김)가 나무가 되도록 하는 매칭

조건2: 완전 매칭에서 매칭을 제거한 나무가 동형이면 같은 매칭, 동형이 아니면 다른 매칭

표 5. $d = (2, 2, 2, 3, 3, 4)$ 인 그래프의 완전 매칭(점선의 모임)

차수열(d)	매칭그래프	완전 매칭
$d = (2, 2, 2, 3, 3, 4)$		

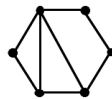
표 6. $d = (2, 2, 2, 2, 3, 5)$ 인 그래프의 완전 매칭(점선의 모임)

차수열(d)	매칭그래프	완전 매칭
$d = (2, 2, 2, 2, 3, 5)$		

표 7. $d = (2, 2, 2, 2, 4, 4)$ 인 그래프의 완전 매칭(점선의 모임)

차수열(d)	매칭그래프	완전 매칭
$d = (2, 2, 2, 2, 4, 4)$		
		없음

위에서 (조건1)은 전개도를 나타내는 나무로부터 유도된 완전 매칭인지 아닌지의 여부를 결정하는 조건이고, (조건2)는 두 매칭이 같은지 여부를 결정하는 조건이다. 예를 들어, 표 5에 있는 그래프



의 세 가지 완전 매칭을 생각해보자. 두 번째 있는 매칭은 (조건1)을 만족하지 못한다. 그리고 첫 번째와 세 번째 매칭은 (조건2)의 관점에서 서로 다른 매칭이다. 실제로, 다음을 알 수 있다(그림 5 참조).

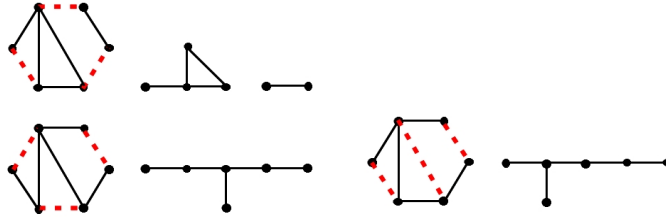


그림 5. 완전매칭과 완전매칭을 제거(꼭짓점은 남김)한 나무

표 8은 차수열에 따른 (조건1)과 (조건 2)를 만족하는 완전 매칭 수를 정리한 것이며, 따라서 직육면체의 전개도 개수는 11개가 존재함을 알 수 있다.

표 8. 차수열에 따른 (조건1)과 (조건 2)를 만족하는 완전 매칭 수

차수열(d)	그래프	매칭 수	판정
$d = (2, 2, 3, 3, 3, 3)$	G_1	1	·모든 매칭이 (조건1) 만족 ·(조건2)에 따라 모든 매칭이 같음
	G_2	1	·모든 매칭이 (조건1) 만족 ·(조건2)에 따라 모든 매칭이 같음
	G_3	1	·첫 번째 매칭은 (조건1)을 만족하지 못함 ·(조건2)에 따라 두 번째와 세 번째 매칭은 같음
	G_4	1	·세 번째 매칭은 (조건1)을 만족하지 못함 ·(조건2)에 따라 첫 번째와 두 번째 매칭은 같음
$d = (2, 2, 2, 3, 3, 4)$	G_5	1	·모든 매칭이 (조건1) 만족 ·(조건2)에 따라 모든 매칭이 같음
	G_6	1	·모든 매칭이 (조건1) 만족 ·(조건2)에 따라 모든 매칭이 같음
	G_7	2	·두 번째 매칭은 (조건1)을 만족하지 못함 ·(조건2)에 따라 첫 번째와 세 번째 매칭은 다른 매칭
	G_8	1	·모든 매칭이 (조건1) 만족 ·(조건2)에 따라 모든 매칭이 같음
$d = (2, 2, 2, 2, 3, 5)$	G_9	1	·모든 매칭이 (조건1) 만족 ·(조건2)에 따라 모든 매칭이 같음
$d = (2, 2, 2, 2, 4, 4)$	G_{10}	1	·모든 매칭이 (조건1) 만족 ·(조건2)에 따라 모든 매칭이 같음
	G_{11}	0	완전 매칭 없음

2) 직육면체

정육면체와는 달리 직육면체인 경우는 3쌍의 평행면을 구성하는 다각형이 직사각형이다. 즉, 일반적으로 ‘서로 다른 3개의 직사각형’으로 구성된다. 따라서 직육면체의 전개도는 3쌍의 매칭이 서로 다른 경우를 생각해야 한다. 이를 위해서, 3쌍의 매칭을 3가지의 색으로 구분하자. 편의상, 여기서는 매칭을 이루는 3개의 선분을 ‘선 굵기가 다른 두 선분과 점선’으로 표현했다. 따라서 색 보존 동형인 매칭⁴⁾은 최대한 $3! = 6$ 가 생길 수 있다.

이제, 표 8의 정보로부터 색 보존 동형인 매칭의 수를 구해보자. 매칭을 이루는 변이 $e = (a, b)$ 일 때, 편리를 위해서 $e = [d(a), d(b)]$ 로 나타내자. 여기서 d 는 꼭짓점의 차수를 의미한다.

(1) 그래프 G_1

그림 6은 그래프 G_1 에서의 완전 매칭과 그에 따른 전개도를 보여준다. 그래프 G_1 에서 ‘가는 실선’은 전개도에서 면들의 인접성을 보여 주며, 매칭의 정보는 면의 평행성을 보여 준다. 따라서 이러한 정보로부터 전개도를 어렵지 않게 그릴 수 있다.

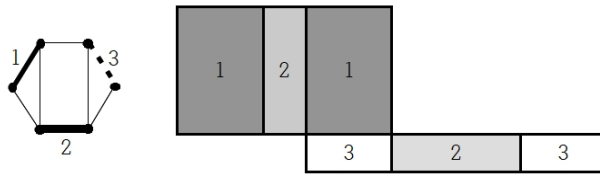


그림 6. 그래프 G_1 에서의 완전 매칭과 전개도

한편, 그림 7은 그래프 G_1 에서의 색 보존 동형인 매칭을 보여준다. 실제로, 매칭을 이루는 변은 각각 $[2, 3]$, $[2, 3]$ 및 $[3, 3]$ 이다. 그림 7에서 변 $[2, 3]$ 은 각각 ‘중간 굵기의 실선’과 ‘점선’, $[3, 3]$ 은 ‘굵은 실선’을 나타낸다. 따라서 동형인 색 보존 매칭의 개수를 찾기 위해서, 변 $[3, 3]$ 을 기준으로 같은 차수 $[2, 3]$ 으로 표현된 두 변을 교환(차수 보존)했을 때 두 그래프가 색 보존 동형인가를 살펴보면 된다. 그림 7을 참조하면, 6개의 색 보존 매칭 가능성 중에서 2개씩 색 보존 동형 매칭이 된다. 그림 8은 그림 7의 동형인 색 보존 매칭에 따른 합동인 두 전개도를 보여준다. 따라서 그래프 G_1 에서 만들어 질 수 있는 서로 다른 색 보존 매칭은 3개가 생긴다. 이로부터, 전개도의 개수는 3개가 됨을 알 수 있다.

⁴⁾ $G = (V, E)$ 가 그래프이고, $M, M' (\subset E)$ 완전매칭일 때, $(M, \chi), (M', \chi')$ 이 색 보존 동형이 되기 위한 필요충분 조건은 어떤 그래프 동형사상 $\phi \in \text{Aut}(G)$ 가 존재해서 다음의 두 조건을 만족하는 것이다. (1) $\phi(M) = M'$, (2) $\chi(e) = \chi'(\phi(e))$. 여기서 χ 와 χ' 은 각각 M 과 M' 에서 정의된 색 함수이다.



그림 7. 동형인 색 보존 매칭



그림 8. 그림 7에 따른 합동인 두 전개도

(2) 그래프 G_2

그림 9는 그래프 G_2 에서의 색 보존 동형인 매칭을 보여준다. 실제로, 매칭을 이루는 변은 각각 $[2, 3]$, $[2, 3]$ 및 $[3, 3]$ 이고, 변 $[3, 3]$ 을 기준으로 두 개의 매칭이 색 보존 동형이다. 따라서 그래프 G_2 에서 만들어 질 수 있는 서로 다른 색 보존 매칭은 3개가 있다. 이로부터, 전개도의 개수는 3개가 됨을 알 수 있다.

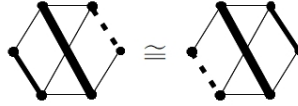


그림 9. 동형인 색 보존 매칭

(3) 그래프 G_3

그림 10은 그래프 G_3 에서의 색 보존 동형인 매칭을 보여준다. 실제로, 매칭을 이루는 변은 각각 $[3, 3]$, $[3, 3]$ 및 $[2, 2]$ 이고, 변 $[2, 2]$ 를 기준으로 두 개의 매칭이 색 보존 동형이다. 따라서 그래프 G_3 에서 만들어 질 수 있는 서로 다른 색 보존 매칭은 3개가 있다. 이로부터, 전개도의 개수는 3개가 됨을 알 수 있다.



그림 10. 동형인 색 보존 매칭

(4) 그래프 G_4

그림 11은 그래프 G_4 에서의 동형인 아닌 색 보존 매칭을 보여주고 있다. 실제로, 매칭을 이루는 변은 각각 $[2, 3]$, $[2, 3]$ 및 $[3, 3]$ 이고, 변 $[3, 3]$ 을 기준으로 두 개의 매칭이 색 보존 동형이 아니다⁵⁾. 즉, 매칭을 이루는 변(edge) 하나를 고정할 때 마다 두 개의 서로 다른 색 보존 매칭이 생긴다. 따라서 그래프 G_4 에서 만들어 질 수 있는 서로 다른 색 보존 매칭은 6개가 있다. 이로부터, 전개도의 개수는 6개가 됨을 알 수 있다.

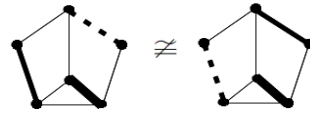


그림 11. 동형이 아닌 색 보존 매칭

(5) 그래프 G_5

그림 12는 그래프 G_5 에서 동형인 아닌 색 보존 매칭을 보여준다. 실제로, 매칭을 이루는 변은 각각 $[2, 3]$, $[2, 3]$ 및 $[2, 4]$ 이고, 변 $[2, 4]$ 를 기준으로 두 개의 매칭이 색 보존 동형이 아니다(주석 5의 아이디어를 사용). 즉, 매칭을 이루는 변(edge) 하나를 고정할 때 마다 두 개의 서로 다른 색 보존 매칭이 생긴다. 따라서 그래프 G_5 에서 만들어 질 수 있는 서로 다른 색 보존 매칭은 6개가 있다. 이로부터, 전개도의 개수는 6개가 됨을 알 수 있다.

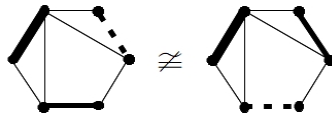
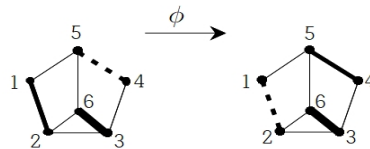


그림 12. 동형이 아닌 색 보존 매칭

⁵⁾ 색 보존 그래프 동형사상 ϕ 가 존재한다고 가정하자. 그러면 꼭짓점의 인접성이 보존되어야 한다.



사상 ϕ 가 색 보존이기 때문에 $\phi(1) = 4, \phi(2) = 5, \phi(4) = 1, \phi(5) = 2$ 가 성립해야 한다. 이 경우 $\phi((1, 5)) = (4, 2)$ 가 된다. 그러나 두 꼭짓점 1, 5는 인접하고 있지만, 두 꼭짓점 4, 2는 인접하고 있지 않다. 이는 모순이다.

(6) 그래프 G_6

그림 13은 그래프 G_6 에서의 동형인 아닌 색 보존 매칭을 보여준다. 실제로, 매칭을 이루는 변은 각각 $[2, 3]$, $[2, 3]$ 및 $[2, 4]$ 이고, 변 $[2, 4]$ 를 기준으로 두 개의 매칭이 색 보존 동형이 아니다(주석 5의 아이디어를 사용). 즉, 매칭을 이루는 변(edge) 하나를 고정할 때 마다 두 개의 서로 다른 색 보존 매칭이 생긴다. 따라서 그래프 G_6 에서 만들어 질 수 있는 서로 다른 색 보존 매칭은 6개가 있다. 이로부터, 전개도의 개수는 6개가 됨을 알 수 있다.



그림 13. 동형이 아닌 색 보존 매칭

(7) 그래프 G_7

그래프 G_7 인 경우에는 두 개의 서로 다른 매칭을 가진다. 그림 14는 각각 동형인 아닌 색 보존 매칭을 보여주고 있다. 실제로, 매칭을 이루는 변은 각각 $\{[2, 2], [2, 4], [3, 3]\}$, $\{[2, 2], [2, 3], [3, 4]\}$ 이다. 따라서 각각 $3! = 6$ 개의 서로 다른 색 보존 매칭이 생긴다. 따라서 그래프 G_7 에서 만들어 질 수 있는 서로 다른 색 보존 매칭은 모두 12개가 생긴다. 이로부터, 전개도의 개수는 12개가 됨을 알 수 있다.

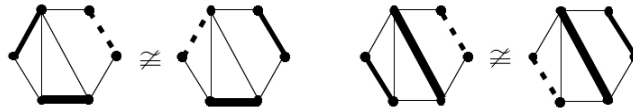


그림 14. 동형이 아닌 색 보존 매칭

(8) 그래프 G_8

그림 15는 그래프 G_8 에서의 동형인 아닌 색 보존 매칭을 보여준다. 실제로, 매칭을 이루는 변은 $[2, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$ 이다. 따라서 $3! = 6$ 개의 서로 다른 색 보존 매칭이 생긴다. 따라서 그래프 G_8 에서 만들어 질 수 있는 전개도의 개수는 6개가 됨을 알 수 있다.

(9) 그래프 G_9

그림 16은 그래프 G_9 에서의 동형인 아닌 색 보존 매칭을 보여준다. 실제로, 매칭을 이루는 변은 $[2, 2]$, $[2, 3]$, $[2, 5]$ 이다. 따라서 $3! = 6$ 개의 서로 다른 색 보존 매칭이 생기며, 따라서 그래프 G_9 에서 만들어 질 수 있는 전개도의 개수는 6개가 됨을 알 수 있다.

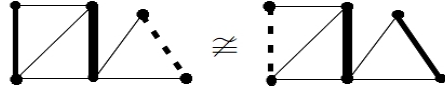


그림 15. 동형이 아닌 색 보존 매칭



그림 16. 동형이 아닌 색 보존 매칭

(10) 그래프 G_{10}

그림 17은 그래프 G_{10} 에서의 동형인 색 보존 매칭을 보여준다. 실제로, 매칭을 이루는 변은 각각 $[2, 4]$, $[2, 4]$ 및 $[2, 2]$ 이고, 변 $[2, 2]$ 를 기준으로 두 개의 매칭이 색 보존 동형이다. 따라서 그래프 G_{10} 에서 만들어 질 수 있는 서로 다른 색 보존 매칭은 3개가 있다. 이로부터, 전개도의 개수는 3개가 됨을 알 수 있다.



그림 17. 동형인 색 보존 매칭

이상을 정리하면 표 9와 같다. 따라서 직육면체의 전개도 개수는 54가 생긴다.

3) 정사각기둥

정사각기둥인 경우에는 3쌍의 평행면 중에서 2쌍이 합동인 직사각형이고, 1쌍은 정사각형이다. 따라서 정사각기둥의 전개도의 개수는 찾는 문제는 전개도를 나타내는 나무에서 만들어진 매칭그래프에서 3쌍의 매칭 중 2쌍이 같은 색을 가지는 색 보존 동형 매칭의 개수를 찾는 문제로 귀착된다.

표 8의 그래프 G_1, G_2, G_3 및 G_{10} 인 경우에는 색 보존 동형 매칭이 각각 2개씩 생긴다. 예를 들어, 그래프 G_1 인 경우를 생각해 보자. 매칭을 이루는 변은 각각 $1 = [2, 3]$, $3 = [2, 3]$ 및 $2 = [3, 3]$ 이다. 그림 18에서 변 $1 = [2, 3]$ 을 기준으로, 다른 차수의 두 변 $3 = [2, 3]$ 과 $2 = [3, 3]$ 의 색 교환은 색 보존 매칭의 관점에서 동형이 아니다(차수가 다르기 때문에). 그림 19는 그림 18의 동형이 아닌 색 보존 매칭에 따른 합동이 아닌 두 전개도를 보여준다.

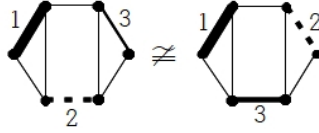


그림 18. 동형이 아닌 색 보존 매칭

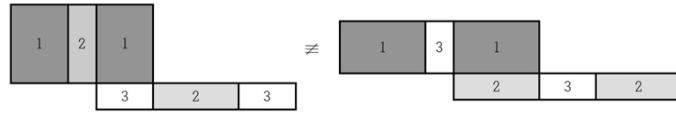


그림 19. 그림 18에 따른 합동이 아닌 직육면체의 전개도

그러나 변 2와 3이 같은 색(전개도 에서는 같은 모양)이라면 색 보존 동형 매칭이며, 그림 19의 두 전개도는 같다. 이는 정사각기둥의 전개도이다(그림 20 참조).



그림 20. 그림 19에서 면 2와 3이 같은 모양: 정사각기둥의 전개도

한편, 그래프 G_4, G_5, G_6, G_7, G_8 및 G_9 인 경우에는 각 그림에 있는 동형이 아닌 색 보존 매칭들이 동형이 된다. 예를 들어, 그림 12에 동형이 아닌 색 보존 매칭이 ‘실선’과 ‘점선’이 같은 색이면 동형인 색 보존 매칭이 된다. 따라서 이 경우의 그래프에서는, 서로 다른 3색의 색 보존 매칭 6개 중에서 두 개씩 같은 매칭이 되어 각각 3개씩의 색 보존 매칭이 생긴다.

이상을 정리하면 표 9와 같다. 따라서 정사각기둥의 전개도 개수는 29개이다.

3.2. 결론 및 제언

정다면체의 전개도는 학생들에게 공간 시각화 능력을 길러 주는데 효과적인 학습 주제 중 하나이다. 특히, 11개의 정육면체의 전개도, 직육면체의 전개도 개수와 관련된 내용은 5학년 2학기 교사용지도서([10], p.274)에 나타나있지만, 직육면체의 전개도

표 9. 차수열에 따른 색 보존 완전 매칭 수

차수열(d)	그래프		색 보존 완전 매칭 수	
			서로 다른 3색 매칭	두 색이 같은 매칭
$d = (2, 2, 3, 3, 3, 3)$	G_1		3	2
	G_2		3	2
	G_3		3	2
	G_4		6	3
$d = (2, 2, 2, 3, 3, 4)$	G_5		6	3
	G_6		6	3
	G_7		12	6
	G_8		6	3
$d = (2, 2, 2, 2, 3, 5)$	G_9		6	3
$d = (2, 2, 2, 2, 4, 4)$	G_{10}		3	2
매칭 합계			54	29

개수와 관련된 오류가 있다⁶⁾. 물론, 학교수학에서는 전개도의 개수를 구하는 것을 강조하고 있지는 않다. 이 논문에서는 영재 심화 또는 사사과정 학생들의 교육과정과 연계된 학습 소재의 관점에서 학생들이 수학을 만들어 나가는 과정과 이러한 과정 속에서 교수자의 수학화 과정을 논의하고 있다. 정육면체와 관련된 학생들의 수학화 과정과 교수자의 수학화 과정은 그림 21과 같다. 교수자인 경우는 직육면체와 정사각 기둥의 전개도 개수를 구하기 위해 색 보존 매칭의 개념을 사용하였다.

한편, 정팔면체, 정십이면체 및 정이십면체의 전개도의 개수를 구하는 문제에 대한 이 논문에서의 접근방식은 유용하지 않을 수 있다. 그 이유는 분할의 경우의 수가

⁶⁾ 직육면체의 전개도가 6가지가 있다고 서술되어 있다. 그러나 실제로는 54이다.

너무 많고, 또한 차수열에 따른 그래프의 개수가 너무 많아서 개인용 컴퓨터로는 처리가 불가능하며, 영재 심화과정 또는 사사과정에서 사용할 수 있는 새로운 접근법이 요구된다.

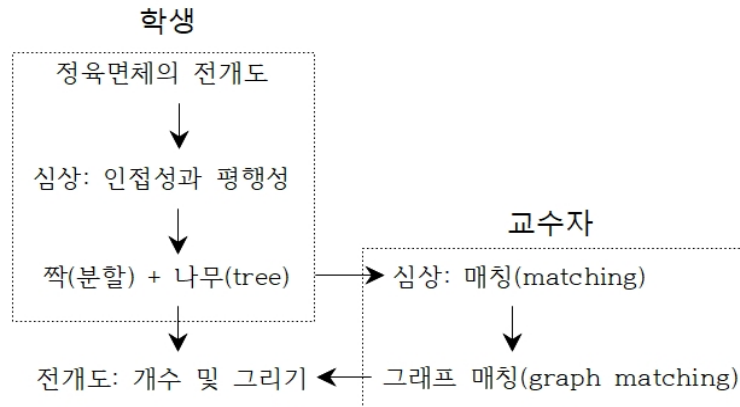


그림 21. 수학화 과정

References

1. Chung, Y. & Kim, B. (2014). Didactical Contemplation on the Development Figure. *Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics: School Mathematics*, **16**(2), 285-301.
2. Chung, Y. (2024). Analysis of the development diagram of the cube using graph theory. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series A: The Mathematical Education*, **63**(4), 707-723.
3. Chong, Y. (2017). Teaching Spatial Sense of Solid Figures in Elementary School Mathematics. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, **21**(1), 161-194.
4. Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D, Reidel Publishing Company.
5. Hwang, H. & Kim, S. (2019). A Study on the Meaning of Reflection and Meta-Cognition in Mathematics Education. *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **33**(1), 35-45. <https://doi.org/10.7468/jksmee.2019.33.1.35>
6. Kim, Y. & Chong, Y. (1997). A Study on Freudenthal's Mathematising Instruction Theory. *Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics*, **7**(2), 1-23.
7. Kosniowski, C. (1980). *A First course in algebraic topology*. Cambridge University Press.

8. Kwon, S. (2019). A Study on the didactic transposition of the pre-service elementary school teachers for Mathematics instruction. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, **22**(4), 415-438.
9. McGee, M. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*, **86**(5), 889-918. <https://doi.org/10.1037/0033-2909.86.5.889>
10. Ministry of Education. (2015). *Mathematics 5-2: Teacher's Guide*. Seoul: Chunjae Education.
11. Lee, C. & Song, S. (2017). A Study on the Development of Instructional Materials in Finding all the Planar Figures of Cuboid. *The Journal of Education*, **37**(2), 233-257.
12. Seo, H. & Lee, K. (2018). An International Comparison of Nets of Solids Presented in Elementary Mathematics Textbooks. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, **22**(2), 199-220.
13. Wilson, R. & Watkins, J. (1990). *Graphs, an introductory approach*. John Wiley & Sons. Inc.

^aHOSOO LEE, PROFESSOR, JEJU NATIONAL UNIVERSITY:
Email address: hosoo@jejunu.ac.kr

^bKEUNBAE CHOI, PROFESSOR, JEJU NATIONAL UNIVERSITY:
Email address: kbchoe@jejunu.ac.kr