

동적 기하를 활용한 아리스타르코스 측정법의 현대적 재구성과 고등학생의 수학적
모델링 타당화 과정 연구

A STUDY ON THE MODERN RECONSTRUCTION OF
ARISTARCHUS' METHOD USING DYNAMIC GEOMETRY AND
THE MATHEMATICAL MODELING VALIDATION PROCESS OF
HIGH SCHOOL STUDENTS

조상제^a, 조민식^{b,*}

ABSTRACT. This study examined representations of Aristarchus' measurement method and the educational value of GeoGebra-based modeling. Textbook analysis and a case study revealed that fixed values constrained critical thinking, whereas modeling tasks led students to derive 89.85° and experience cognitive conflict. Through technological refinement, students recognized the model's validity and engaged in deeper validation. The study highlights the role of technology in fostering data evaluation and mathematical understanding.

1. 서론

현대 수학교육에서 수학적 모델링은 실세계의 복잡한 현상을 수학적 구조로 변환하여 해결하는 핵심 역량으로 강조된다. 2015 개정 수학 교육과정에서 문제해결 역량의 하위 요소로 수학적 모델링을 명시하며 그 중요성을 부각해 왔으며([16, 19]), 2022 개정 수학과 교육과정에서는 공학 도구의 활용과 교과 간 연결 역량을 더욱 강조하며, 수학적 모델링을 통해 실세계의 문제를 비판적으로 분석하고 합리적으로 해결하는 태도를 중점적으로 다루고 있다([16]). 이러한 교육과정의 변화는 박제된 지식으로서의 수학이 아닌, 디지털 소양을 바탕으로 현실 세계와 상호작용하는 능동적인 수학 학습으로의 패러다임 전환을 요구한다.

그러나 Jung([9])이 지적했듯이, 실제 학교 현장의 교과서 과제들은 현실의 복잡성을 제거한 채 정형화된 풀이만을 요구하는 ‘인위적 단순화’의 한계를 보이고 있다.

Received by the editors April 12, 2026. Revised May 13, 2026. Accepted May 14, 2026.

2020 *Mathematics Subject Classification.* 97M10, 97C30.

Key words and phrases. Aristarchus' Method, Mathematical Modeling, GeoGebra, Mathematical Validation

주요어 : 아리스타르코스 측정법, 수학적 모델링, 지오지브라, 수학적 타당화

*Corresponding author.

© 2026 Korean Soc. Math. Edu.



특히 중학교 3학년 수학 교과서에 소개된 ‘아리스타르코스(Aristarchus of Samos)의 달 크기 측정법’은 고대 그리스의 기하학적 통찰을 보여주는 훌륭한 소재임에도 불구하고, 실제 교과서에서는 아리스타르코스의 측정법을 주로 역사적 일화로 소개하거나 상현달의 위상에서 형성되는 직각삼각형의 삼각비를 이용해 거리비를 구하는 산술적 절차에만 집중하고 있다. 이는 Park과 Han([19])이 지적한 바와 같이, 모델링의 핵심인 ‘변수 식별’ 단계가 빠져있으며 이미 정제된 데이터를 학습자에게 일방적으로 주입하는 방식이다. 아리스타르코스의 방법은 천문학적 관측의 불확실성을 내포하고 있음에도 불구하고, 현재의 교과서는 이를 정적인 지식으로만 다룸으로써 학생들이 Villarreal([21])이 제안한 ‘기술이 풍부한 환경에서의 역동적 모델링’을 경험할 기회를 차단하고 있다.

본 연구에서는 아리스타르코스의 고전적 측정법을 수학적 모델링의 관점에서 재구조화하고, 이를 공학 도구를 활용하여 현대적 정밀도로 복원하는 수업 모델을 개발 및 적용하였다. 이를 위하여 먼저 2015 개정 중학교 3학년 수학 교과서 10종에 나타난 아리스타르코스 측정법의 단원 내 등장 위치와 기술 정도에 따른 특징을 분석하였다. 이어 아리스타르코스의 측정 오차를 보완하기 위해 재구성된 수학적 모델링 과제를 실제 수업에 적용하고, 이 과정에서 나타난 학생들의 탐구 과정과 타당화 특징을 심층적으로 고찰하였다.

특히 본 연구의 수업 설계는 수학적 증명이 고정된 진리의 확인이 아니라 가설적 성격을 지닌 명제들을 끊임없이 검증하고 정교화하는 과정이라는 Jahnke([7])의 관점을 이론적 바탕으로 삼았다. 이러한 비판적 탐구 과정은 Park과 Han([19]), Jung([9])이 지적한 교과서 과제의 ‘인위적 단순화’ 문제를 해결하고, 학생들이 실제적인 데이터에 기반한 모델링을 경험하게 하는 데 목적이 있다.

이상의 연구 과정은 2022 개정 교육과정에 따른 중학교 3학년 수학 교과서의 현장 도입을 앞둔 시점에서, 기존 교과서 과제들에 대한 분석을 통해 차기 교육과정의 성공적인 안착을 돕는 필수적인 선행 작업이 될 것이다. 결론적으로 고대 천문학적 발견을 현대적 공학 도구로 재구성하는 본 연구의 시도는 2022 개정 교육과정이 지향하는 융합적 모델링 역량 강화의 실천적 방안을 제시한다는 점에서 그 의의를 찾을 수 있다.

2. 연구의 배경

2.1. 이론적 배경

2.1.1 수학적 모델링의 이해와 교과서 과제 재구성

수학적 모델링은 실세계의 복잡한 현상을 수학적 수단에 의해 정형화하고 해석하여 문제를 해결하는 역동적인 과정이다. Hwang([5])은 모델링이 단순히 주어진 수식을 푸는 과정이 아니라, 학습자가 현상을 스스로 구조화하고 자신만의 ‘고유 모델’을 창조하는

과정임을 강조하였다. 모델링 사이클은 일반적으로 실세계 상황의 이해, 수학적 모델 수립, 수학적 결과 도출, 그리고 결과의 타당화(Validation) 단계를 거친다. 특히 타당화 단계는 도출된 수학적 결과가 실제 상황과 부합하는지 비판적으로 검토하고 필요시 모델을 수정하는 과정으로, 모델링의 본질적 가치를 담고 있다.

Park과 Han([19])은 우리나라 수학 교과서의 실생활 맥락 문항들이 모델링의 핵심 단계인 ‘변수 식별하기’를 생략한 채 이미 정제된 데이터만을 제공하고 있음을 지적하였다. 이는 학생들이 실생활 상황을 수학적으로 조직화하는 경험을 차단하고, 이미 고정된 수치를 수용하게 함으로써 비판적 사고를 제한한다. Jung([9]) 또한 교과서 과제가 모델링 과제로 기능하기 위해서는 현실의 복잡성이 반영된 맥락으로의 재구성이 필수적임을 역설하였다. 따라서 아리스타르코스의 측정법을 다루는 교과서 과제 역시, 단순히 87°라는 고정된 수치를 제공하는데 이를 넘어 학생들이 직접 데이터를 탐색하고 모델을 수정할 수 있는 형태로의 재구성이 요구된다.

2.1.2 테크놀로지 기반의 수학적 탐구

Hanna([3])는 동적 기하 소프트웨어(Dynamic Geometry Software, DGS)의 시각화와 탐색 기능이 수학적 증명의 설명력을 높여준다고 보았다. 동적 기하는 추상적인 기하학적 관계를 동적으로 구현하여 학습자가 다양한 변수를 조절하며 최적의 값을 찾아가는 탐색적 증명을 가능하게 한다. Heo([4])는 천문 현상을 수학적으로 탐구할 때 이러한 동적 환경이 행성의 운동과 위상 변화를 직관적으로 이해하게 하며, 수학적 용어와 과학적 용어를 병행하는 풍부한 의사소통을 촉진함을 밝힌 바 있다.

Villarreal([21])은 디지털 도구가 모델링 과정에서 데이터를 수집하고 모델의 타당성을 검증하는 핵심 기제로 작용하는 ‘기술이 풍부한 모델링 시나리오’를 제안하였다. 본 연구에서 사용하는 지오지브라(GeoGebra)는 지구, 달, 태양의 상대적인 크기와 위치를 고려하고 지구 주위를 공전하는 달의 운동을 모델링하여 월식 현상을 직관적으로 표현할 수 있는 장점이 있으며, 이런 모델링 결과물을 이용하여 학생들이 실제 관측 수치인 89.85°를 스스로 발견하는 것을 가능하게 한다. 결과적으로 공학 도구를 바탕으로 구축된 모델이 실제 달의 크기와 얼마나 부합하는지를 확인하는 강력한 타당화 도구가 된다.

2.1.3 아리스타르코스 측정법의 역사적기하학적 고찰

아리스타르코스는 달의 위상이 반달이 되는 순간, 태양-달-지구의 각도가 90°를 이룬다는 점에 착안하여 당시 태양-지구-달이 이루는 각을 약 87°로 측정하였다. 지구와 달 사이의 거리를 a , 지구와 태양 사이의 거리를 b 라고 하면, 직각삼각형의 삼각비에 의해 두 거리의 비는 $\cos 87^\circ = a/b \approx 1/19$ 이다. 또한, 그는 월식의 지속 시간을 관측하여 지구 본그림자(Umbra)의 폭이 달의 지름(D)의 약 2배에 해당한다고 추정하였다. 그림

1과 같이 태양과 지구의 크기 차이로 인해 본그림자는 정점 O를 향해 좁아지는 원뿔 형태를 형성하게 된다. 지구의 지름을 D_E , 태양의 지름을 D_S 라고 할 때, 일식 현상을 통해 달과 태양의 각지름이 약 0.5° 로 동일하다는 관측 결과를 바탕으로 지구에서 각 천체까지의 거리 비(1 : 19)가 곧 달의 지름(D)과 태양의 지름(D_S)의 비와 같게 된다.

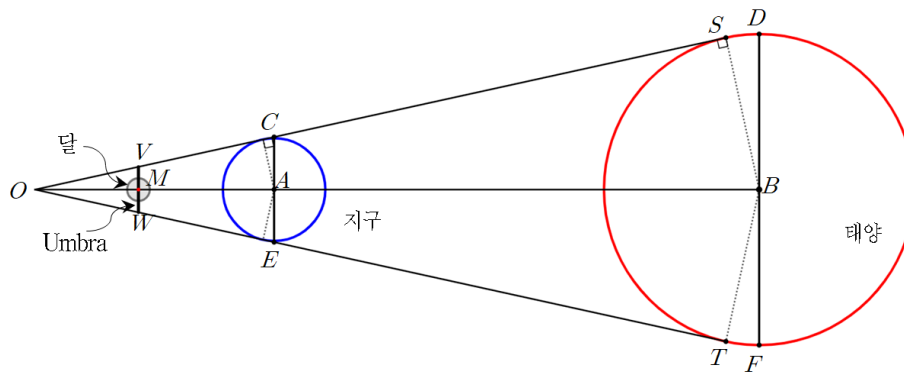


그림 1. 월식일 때 태양-지구-달의 배치(크기는 고려하지 않음)

아리스타르코스의 측정값을 바탕으로 달의 크기를 구해보면, 지구의 지름 D_E , 달의 지름 D 에 대해, $\overline{VW} = 2D$, $\overline{DF} = 19D$ 가 되고 삼각형의 닮음에 의해 $1 : 20 = D_E - 2D : 19D - 2D$ 가 된다. 따라서, $D = \frac{20}{57}D_E \approx 0.35D_E$ 이다. 그런데 아리스타르코스와 같은 시대의 에라스토테네스(Eratosthenes, B.C. 276 – 194)가 하집날의 시에나와 알렉산드리아의 태양고도를 이용하여 지구의 크기 D_E 를 구해놓은 결과인 $D_E = 12,800\text{km}$ 로 계산하면 달의 크기 $D = 4,480\text{km}$ 이다. 이것은 현대의 측정값 $3,476\text{km}$ 와는 약 20% 이상의 차이를 보이는데, 이러한 차이는 아리스타르코스가 설정한 기하학적 모델의 전제 조건과 실제 관측 상황의 괴리에서 기인한다.

아리스타르코스는 월식 과정에서 달이 지구 본그림자의 정중앙(지름)을 관통한다고 가정하였으나, 실제 관측된 대부분의 월식은 그림자의 중심에서 벗어난 현(Chord)의 궤적을 지나게 된다. 달의 이동 경로가 그림자의 중심축에서 이탈할수록 개기월식 지속 시간은 실제 그림자의 최대 폭(지름)보다 짧게 측정될 수밖에 없으며, 이러한 관측상의 변수가 지구 그림자와 달의 크기 비를 왜곡하는 결정적인 원인이 된 것이다. Kuhn([13])은 아리스타르코스가 월식의 진행 과정을 기하학적 모델로 변환하는 정교한 관측 논리를 다음과 같이 기술하였다.

‘아리스타르코스는 ㉔달의 모서리가 처음 그림자에 들어서는 순간과 달이 처음으로 완전히 사라지는 순간 사이에 지속된 시간을 측정했다. 이 수치를 그는 ㉕달이 완전히 보이지 않는 동안의 시간과 비교했고, 이로써 그는 ㉔완전히 보이지 않는 기간이 달이 지구의 그림자로 들어가는 데 걸리는 기간과 대략 똑같은 길이라는 것을 발견했다.’([13])

이러한 Kuhn([13])의 서술은 아리스타르코스가 월식의 진행 단계별 시간차를 정밀하게 비교함으로써, 지구 본그림자의 폭과 달의 지름 사이의 물리적 관계를 도출했음을 보여준다. 특히 ㉔에서 ㉖로 이어지는 관측 결과의 발견은 달의 진입 시간과 개기식 지속 시간이 동일하다는 사실에 근거하여, 지구 그림자의 크기가 달 지름의 약 2배에 해당한다는 기하학적 추론의 결정적 토대가 되었다. 여기서 ㉔는 달이 자신의 지름만큼 이동하는데 걸리는 시간을 의미하며, 달은 일정한 속도로 지구를 공전하므로 진입 부분 월식이 일어나 개기월식이 진행되기까지 걸리는 시간이다. ㉖는 개기월식이 지속되는 시간으로 달이 지구 그림자 내부를 통과하는 시간이다. ㉖는 진입 부분월식과 개기월식의 시간이 거의 같다는 것으로 아리스타르코스는 이러한 관측 결과를 바탕으로 지구 그림자와 달 지름의 크기 비가 2 : 1이라는 결론을 내렸다. 하지만 이러한 아리스타르코스의 추론에는 관측상의 중요한 변수가 내재되어 있다. 이는 그가 관측한 월식이 달이 지구 본그림자의 정중앙(지름)을 관통하는 것이 아니라, 중심에서 벗어난 임의의 현을 따라 이동하는 상황이었기 때문이다. 달의 궤적이 그림자의 중심을 지나지 않을 경우, 개기월식의 지속 시간은 실제 그림자의 최대 폭보다 짧게 측정될 수밖에 없으며, 이러한 기하학적 상황의 차이가 현대적 참값과의 미세한 오차를 발생시킨 주요 원인 중 하나로 분석된다. 이를 바탕으로 달의 궤도가 지구 본그림자의 중심에서 수직으로 얼마나 이격되었는지 계산하는 과정은 다음과 같다.

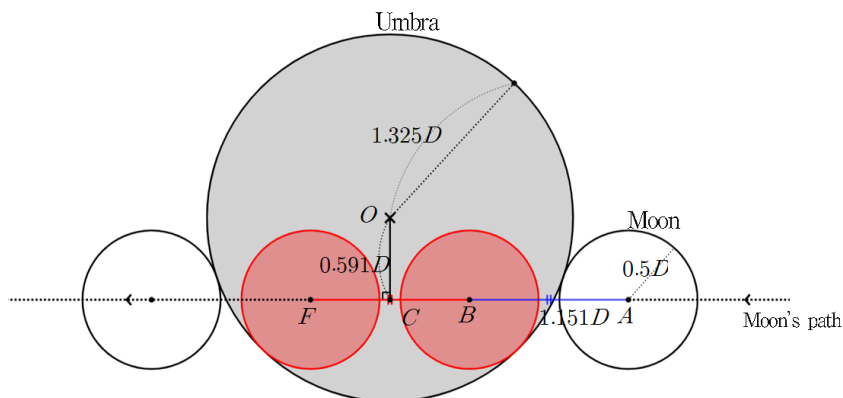


그림 2. 아리스타르코스가 관측한 자료를 바탕으로 재현한 월식

그림 2와 같이 지구의 그림자의 두께는 달의 지름(D)의 약 2.65배이므로¹⁾ 지구 그림자는 반지름 $1.325D$ 이 인 원으로 생각할 수 있다.

선분 OC 는 선분 FB 의 수직이등분선에 해당되므로 $\overline{OC} = h$, $\overline{BC} = x$ 라 두면 $\overline{AB} = 2x$ 이다. 따라서, 직각삼각형 OCA 에서 $(1.325D + 0.5D)^2 = h^2 + (3x)^2$ 이며, $3.330625 \times D^2 = h^2 + 9x^2$ 이다. 또, 직각삼각형 OCB 에서 $(1.315D - 0.5D)^2 = h^2 + x^2$ 이고, $0.680625 \times D^2 = h^2 + x^2$ 이다. 위의 두 식을 연립하면 $8x^2 = 2.65D^2$, $x \approx 0.5755 \times D$ 이다. 이것을 위의 식에 대입을 하면 $h^2 = 0.349375D^2$ 이고 $h \approx 0.5910 \times D$ 이다. 즉, 아리스타르코스가 관측한 월식은 달의 중심이 지구 본그림자의 중심으로부터 수직으로 약 $0.5910 \times D$ 만큼 이격된 궤적을 통과했던 것으로 추정된다.

또한, 아리스타르코스가 측정한 월식은 달이 자신의 지름만큼을 이동하는데 걸리는 시간은 64.5분이었으므로 아리스타르코스가 관찰한 월식에서 달이 완전히 지구의 그림자에 들어가 있던 시간은 $64.5 \times 1.151 \approx 74.2$ 분 정도로 추정된다.

2.1.4 공학 도구(GeoGebra)를 활용한 모델링 과제 설계

아리스타르코스는 개기월식을 관찰하여 달이 지구의 본그림자에 진입하여 완전히 가려지는 시간과 그림자 속에 머무는 시간을 비교함으로써, 지구 그림자와 달의 상대적 크기 비가 2 : 1임을 도출하였다. 본 연구는 이러한 역사적 통찰을 바탕으로, 지오지브라(GeoGebra)의 동적 기하 환경에서 실제 천문 수치를 적용하여 모델의 정밀도를 높이고 오차를 보정하는 방법을 표 1과 같이 설계하였다.

표 1. 지오지브라를 활용한 천체 모델링의 수치 및 방정식 설정

대상	크기 및 거리에 대한 실제비	GeoGebra의 방정식 표현
지구(Earth)	반지름 $r = 1$	$x^2 + y^2 = 1^2$
달(Moon)	반지름 $r_m = 0.25$	$x^2 + y^2 = (0.25)^2$
태양(Sun)	반지름 $r_s = 109$	$(x - 23438)^2 + y^2 = 109^2$
지구-달 거리	거리 $60r$	$x^2 + y^2 = 60^2$
지구-태양거리	거리 23,438 r	실제 비례에 따른 원거리 좌표 배치

먼저 지구의 반지름을 단위 길이 1로 설정하고 원점에 배치한다. 달의 공전 궤도는 반지름 60인 원으로 작도하며, 태양은 실제 크기 비(109)를 반영하여 배치한다.

¹⁾기원전 318년 5월 31일 월식(진입 부분월식, 개기월식, 진출 부분월식) 지속시간은 236분으로 부분월식 시간은 $\text{Par} - \text{Tot} = 236\text{분} - 107\text{분} = 129\text{분}$ 이며 아리스타르코스는 진입 부분월식과 진출 부분월식 시간이 동일하다고 가정하였으므로, 진입 부분월식 동안 달이 자신의 지름만큼 지나가는데 걸리는 시간은 $129\text{분} / 2 = 64.5\text{분}$ 이 된다. 따라서, 달의 지름 : 지구 그림자의 크기 = $129\text{분} / 2 : (129/2 + 107)$ 으로 약 1 : 2.65가 된다. <https://eclipse.gsfc.nasa.gov/5MCLEmap/0301-0400/LE0318-05-31T.gif>

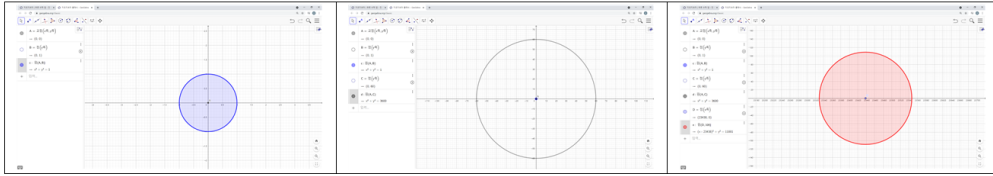


그림 3. 실제 천문비-지구의 크기:달의 공전궤도:태양의 크기=1:60:109

이는 학생들이 우주의 광활한 스케일을 수학적 좌표 평면 위에서 직관적으로 체감하게 함으로써, 단순한 도형 계산을 넘어 실제적 모델링(Authentic Modeling) 단계로 진입하게 한다. 태양과 지구의 공통접선(공통 내접선 2개, 공통 외접선 2개)을 작도하여 지구 뒤편에 형성되는 원뿔 형태의 본그림자(Umbra) 영역을 기하학적으로 정의한다. 학생들이 직접 달을 공전 궤도상에서 이동시키며 그림자 영역을 통과하게 함으로써, 아리스타르코스가 관측했던 월식의 전 과정을 시뮬레이션하고 지구 그림자와 달의 크기 비를 실측하도록 한다.

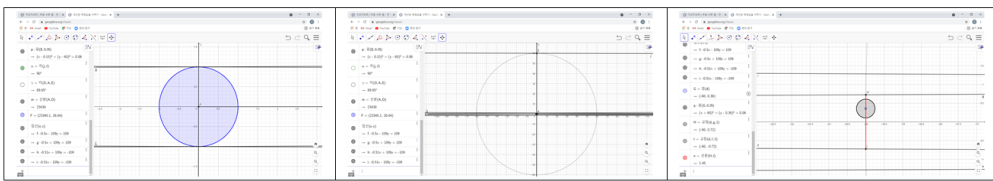


그림 4. 두 원의 공통접선을 이용한 월식 현상의 모델링

지구에서 관측한 달이 정확히 반달(50%)이 되는 지점을 지오지브라의 시각적 피드백을 통해 탐색한다. 이때 ‘지구-달-태양’이 이루는 각도를 측정하여, 교과서에서 소개하는 아리스타르코스의 관측값(87°)과 현대적 실측치(89.85°) 사이의 차이를 발견하게 한다. 이 과정은 도출된 수치를 바탕으로 거리 비를 재계산하고 모델의 정밀도를 수정하는 수학적 타당화(Validation)의 핵심 절차가 된다.

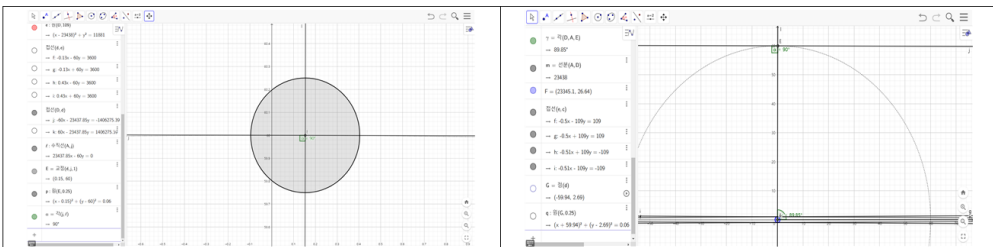


그림 5. 지구에서 관측한 달이 반달일 때, 태양-지구-달이 이루는 각의 크기 (89.85°)

2.2. 연구방법 및 절차

2.2.1 교과서 분석 방법

2026년 3월 현재, 우리나라 중학교 3학년들을 대상으로 적용되는 수학 교과서는 검·인정제에 따라 모두 10종의 교과서가 사용되고 있으며, 2015 개정 교육과정의 내용을 기반으로 개발되었다. 중학교 3학년 수학 교과서의 종수는 (주)동아출판 2종, (주)천재교육 2종, (주)미래엔, (주)금성출판, (주)교학사, (주)좋은책신사고, (주)지학사, (주)비상교육 각각 1종으로 모두 10종이다. 달의 크기와 관련된 내용을 소개하는 단원은 삼각비 단원으로 기하 영역에 속하며, 출판사의 교과서 구성에 따라 4단원 삼각비 또는 5단원 삼각비에서 달의 크기와 관련된 역사적 사실을 소재로 사용하고 있었다.

본 연구에서는 중학교 3학년 수학 교과서 10종을 대상으로 아리스타르코스 측정법의 기술 양상을 분석하기 위해 두 가지 차원의 분석 기준을 수립하였다.

첫째, 단원 내 등장 위치에 따라 도입부 배치(TH)와 종결부 배치(TT)로 구분하여, 해당 소재가 수학적 개념 형성에 기여하는 방식을 분석하였다.

둘째, 기술의 수준(Depth of Description)을 인물 소개(AN)부터 수학적 정당화(A1~A4) 및 현대적 타당화(A5~A7)에 이르는 8단계 코드로 세분화하였다. 이러한 분석틀은 Park과 Han([19])의 변수 식별 관점과 Hwang([5])의 모델링 사이클 이론에 근거하여, 교과서 과제가 모델링의 핵심 요소를 얼마나 충실히 포함하고 있는지 정량적으로 파악하기 위함이다.

표 2. 지오지브라를 활용한 천체 모델링의 수치 및 방정식 설정

코드	교과서에서 달의 크기 관련 내용이 등장 위치에 따른 코드 분류 기준
TH	교과서의 단원의 시작 부분에 달의 크기 관련 내용이 등장 삼각비에 대한 개념 또는 삼각비의 활용에 대한 내용을 학습하기 전에 등장
TT	교과서의 단원의 마무리 부분에 달의 크기 관련 내용이 등장 삼각비에 대한 개념 또는 삼각비의 활용에 대한 내용을 학습한 후에 등장

달의 크기와 관련된 내용을 다루는 교과서는 삼각비의 개념 또는 삼각비의 활용을 학습하기 전에 삼각비의 개념이 역사적으로 발생하고 사용된 사례를 소개하거나, 단원 학습이 끝나고 난 후에 배운 개념을 적용하여 역사적 사실에 대한 이해를 높이는 방식으로 구성 되어졌다. 따라서, 연구자는 삼각비 단원에서 달의 크기와 관련된 내용의 등장 위치에 따라 표 2와 같이 삼각비에 대한 개념이나 활용을 학습하기 전에 교과서에 등장하면 TH(Text Head)라고 분류하고, 삼각비에 대한 개념이나 활용에 대한 학습이 완료된 후에 달의 크기와 관련된 내용을 소개하거나 단원이 끝나는 부분에 제시되면 TT(Text Tail)라고 코드 분류하였다.

교과서별로 삼각비와 관련된 역사적 사실이나 실생활 소재를 이용한 삼각비의 응용을 설명하는 과정에서 아리스타르코스의 방법을 이용한 달의 크기 측정 중 일부를 소개한 경우 다음과 같이 코드로 분류하였다. 먼저, 아리스타르코스에 대한 인물의 업적인 ‘지구에서 달까지의 거리를 측정하였다’ 또는 그와 비슷한 내용에 대하여 언급한 경우는 코드 A1, 교과서에서 소개된 내용에 지구에서 관측한 달이 반달일 때의 지구-달-태양으로 이루어진 삼각형이 직각삼각형이라고 기술하거나 또는 그와 동일한 의미를 갖는 시각적 자료를 제시한 경우는 코드 A2, 지구에서 관측한 달이 반달일 때, 태양-지구-달이 이루는 각의 크기가 87° (또는 달-태양-지구가 이루는 각의 크기가 3°)라고 제시하거나 또는 시각적 자료에 해당 각의 크기를 표현한 경우는 코드 A3, 태양-지구-달이 이루는 각의 크기가 87° 에 대한 코사인값(달-태양-지구가 이루는 각의 크기가 3° 인 경우는 사인값)을 이용하여 지구-달 거리와 지구-태양의 거리비가 1:19가 된다는 내용이 기술되어 있으면 A4라고 분류하였다. 특히, 지구-달 거리와 지구-태양의 거리비가 현실적으로 맞지 않아 태양-지구-달이 이루는 각의 현대의 측정값 89.85° 를 제시한 경우는 코드 A5, 태양-지구-달이 이루는 각의 현대의 측정값을 이용하여 지구-달 거리와 지구-태양 거리의 비가 1:400이라고 기술하면 코드 A6를 부여하였다. 이후, 이러한 과정을 통해서 아리스타르코스 방법의 타당성을 언급하면 A7으로 코딩하였다. 교과서에 따라 아리스타르코스 인물에 대한 언급은 하지만 그 인물의 업적이나 활동에 관한 내용이 달의 크기 측정과 관계가 없는 경우는 AN(Aristarchos Name)로 코드를 부여하였다. 이상의 내용을 정리하면 표 3과 같이 요약할 수 있다.

2.2.2 수업 설계 및 과제 구성

본 연구는 아리스타르코스의 천문 측정 원리를 현대적 관점에서 재구성하기 위해 5단계 탐구 과제(P-A-B-C-D)를 설계하였다. 이를 경상남도 진주시 소재 일반계 고등학교 1학년 남학생 4명을 대상으로 총 4차시에 걸쳐 적용하였다. 본 프로그램은 단편적인 수치 계산에 그치지 않고, 이전 단계의 결과물을 바탕으로 다음 단계의 수학적 모델을 정교화해 나가는 누적적 모델링(Cumulative Modeling) 구조를 취한다. 이러한 설계 방식은 학습자의 인지적 발달과 탐구의 흐름을 유기적으로 연결하여 모델링 역량을 강화하고자 하는 교수·학습 설계 원리([14])를 반영한 것이다. 개별 학습과 소집단 협력 학습을 병행하여 진행된 본 수업의 주요 탐구 특성은 다음과 같다.

먼저, 과제 P는 아리스타르코스가 월식을 통해 지구 그림자와 달의 크기 비를 구하는 과정을 포함하고 있는 제시문을 읽고, 상황을 그림을 이용하여 설명하는 내용을 담고 있다. 학생들은 달이 지구의 그림자로 처음으로 완전히 사라지는데 걸린 시간과 개기 월식이 지속된 시간이 같다는 조건을 이용하여 지구 그림자와 달의 크기를 비교하게 된다.

표 3. 교과서의 아리스타르코스 방법 기술 정도에 따른 코드 분류 기준

코드	교과서의 아리스타르코스 기술 정도에 따른 코드 분류 기준
AN	아리스타르코스 인물의 이름만 안내
	인물의 이름은 등장하나 달의 크기와 관련 없는 내용으로 언급한 경우
A1	아리스타르코스의 업적
	지구에서 달까지의 거리를 처음으로 연구한 사람이라는 내용 기술
A2	반달일 때의 상황
	지구-달-태양은 직각 삼각형을 이룬다를 기술 또는 시각적 자료 제시
A3	반달일 때의 상황
	태양-지구-달이 이루는 각이 87° 라는 기술 또는 시각적 자료 제시
A4	삼각비의 적용
	$\cos 87^\circ$ 또는 $\sin 3^\circ$ 를 이용하여 지구-달:지구-태양=1:19의 결론 제시
A5	반달일 때의 상황
	태양-지구-달이 이루는 각의 크기를 현대의 측정값 89.85° 기술
A6	삼각비의 적용
	현대의 측정값에 기초하여 지구-달 : 지구-태양=1 : 400의 결론 제시
A7	방법의 타당성 언급
	아리스타르코스가 고안한 방법에 대한 타당성에 내용 기술

과제 A는 지구에서 관측한 달이 정확하게 반달인 상황에서 아리스타르코스가 태양-지구-달이 이루는 각이라고 관측한 사실을 바탕으로 지구-달 거리와 지구-태양 거리비를 삼각비(코사인)를 이용하여 구하는 과정을 담고 있다. 특히, 과제 P의 결과와 태양-지구-달이 이루는 각을 이용하여 아리스타르코스가 계산한 달의 크기를 도출하는 과정과 결과를 바탕으로 아리스타르코스 방법의 타당성을 학생들이 평가하도록 하였다.

과제 B는 동적기하 소프트웨어를 이용하여 지구-달-태양계 모델을 천체의 물리량을 기초로 하여 모델링하는 과정을 포함하며, 이를 통해 지구에서 관측한 달이 정확히 반달일 때, 태양-지구-달이 이루는 각의 크기를 현대의 측정값, 89.85° 도출하고 이를 바탕으로 달의 크기를 계산하는 내용을 포함한다.

과제 C는 미국 항공우주국(National Aeronautics and Space Administration, NASA)에서 제공하는 월식 자료([17])를 바탕으로 지구 그림자와 달의 크기 비를 계산하는 활동을 한다. 아리스타르코스가 관측한 결과로는 지구 그림자와 달의 크기 비가 2:1로 나왔지만, 이 활동을 통해 2.65:1의 비를 가진다는 것을 확인할 수 있다. 물론 이렇게 개선된 측정값을 이용하여 다시 한번 달의 크기를 계산하도록 과제를 구성하였다.

과제 D는 과제 B와 C의 결과물을 바탕으로 아리스타르코스가 관측한 실제 월식 사례를 추적하는 활동을 포함한다. 아리스타르코스의 활동 시기와 지역, 관측 기록 등을 종합적으로 분석하여, 그가 경험했을 것으로 추정되는 월식을 최종적으로 특정하게 된다. 이상을 요약하면 표 4와 같다.

표 4. 아리스타르코스 방법으로의 달의 크기 측정 과제의 구성

과제	주요 내용	비고
과제 P	-월식 현상을 이용하여 지구 그림자와 달의 크기 비를 계산 -문제 상황에 대한 실제 모델 형성 요청	개인
과제 A	-태양-지구-달이 이루는 각(87°)을 이용하여 지구-달 : 지구-태양 계산 -과제 P와 과제 A를 이용하여 달의 크기 계산	개인
과제 B	-공학적 도구로 모델링하여 태양-지구-달이 이루는 각(89.85°) 측정 -과제 P와 과제 B를 이용하여 달의 크기 계산	모둠
과제 C	-최대 개기월식, 반영월식 자료를 이용하여 지구 그림자 : 달의 크기 계산 -과제 A와 과제 C를 이용하여 달의 크기 계산	모둠
과제 D	-과제 C와 과제 D를 이용하여 지구의 중심으로부터 떨어진 정도 계산 -과제 D를 이용하여 아리스타르코스가 관측한 월식 추정	모둠

3. 연구 결과 및 결론

3.1. 중학교 수학 교과서의 아리스타르코스 측정법 기술 특징

분석한 수학 교과서에서 근거한 내용을 확인할 수 있으면 ‘O’, 확인할 수 없으면 ‘-’으로 표기하였다. 중학교 3학년 수학 교과서 10종을 분석한 결과 표 5와 같이 나타났다으며, 아리스타르코스 방법을 삼각비 단원에서 다루는 출판사는 총 5종(50%)로 나타났다으며, 삼각비를 학습하기 전 도입(TH)은 교과서는 3종, 학습 후 도입(TT)한 교과서는 2종으로 비슷하게 나타났다.

아리스타르코스 방법을 소개한 교과서 5종은 지구에서 관측한 달이 반달일 때, 태양-달-지구의 중심의 꼭짓점으로 하는 직각삼각형을 언급한다는 것이다. 이것은 삼각비의 정의를 직각삼각형에서 도입하는 것과 동일한 원리로 지구에서 관측한 달이 반달일 때, 태양-지구-달이 이루는 각을 알면 삼각비를 이용하여 지구-달 거리와 지구-태양 거리의 비를 알 수 있다는 것을 나타낸다. 또한, 아리스타르코스 방법을 이용하여 달의 크기와 관련된 내용을 보다 자세하게 다루는 교과서는 2종으로 나타났다으며, 모두 관측값에 대한 삼각비 값을 이용하여 지구-달 거리와 지구-태양 사이의 거리의 비를 계산하였다. 인상적인 부분은 아리스타르코스 방법의 달의 크기와 관련된 내용을 자세하게 다룬

표 5. 중학교 3학년 교과서 10종의 아리스타르코스 방법의 기술 정도에 따른 분류 결과

연번	출판사(단원)	TH	TT	AN	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	비고
1	A(4단원)	-	○	○	○	○	○	○	○	○	○	
2	B(5단원)	○	-	○	○	○	-	-	-	-	-	
3	C(4단원)	-	○	○	○	○	○	○	○	○	○	
4	D(5단원)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
5	E(4단원)	○	-	○	○	○	-	-	-	-	-	
6	F(5단원)	○	-	○	○	○	-	-	-	-	-	
7	G(4단원)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
8	H(4단원)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
9	I(4단원)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
10	J(4단원)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
합계		3	2	5	5	5	2	2	2	2	2	

교과서는 모두 현대의 측정값과 비교하는 내용을 포함했다는 것이다. 즉, 아리스타르코스 방법은 측정 오차로 인해서 현대의 값과 많은 차이를 두고 있지만 ‘대단한 발상’(A 출판사), ‘관측한 자료에 근거하여 지구, 태양, 달의 상대적 위치 또는 크기를 파악한 최초의 시도’(C 출판사)라고 평가하고 있다.



그림 6. 아리스타르코스 방법으로 달의 크기 소개된 교과서 내용

또한, 그림 6과 같이 교과서마다 삼각비 단원에서 아리스타르코스 방법을 설명하는 방식에는 차이가 있었다. ‘A 출판사’는 아리스타르코스 방법을 삼각비를 이용하여 설명한 방식으로 아리스타르코스가 달의 크기를 측정하기 위해 수집한 자료 및 지구-달 거리와 지구-태양 거리의 비를 삼각비를 이용하여 계산한 과정을 담고 있다. 또한, 현대 측정값에 기반한 거리비가 아리스타르코스 측정값과 현저하게 차이가 난다는 것을 언급하지만, 그 이유를 당시의 측정 장비의 한계로 기술하고 아리스타르코스 방법의 기발함을 이야기하고 있다. 이처럼 아리스타르코스 방법을 삼각비와 관련하여 자세하게 기술한 이유 중 하나는 ‘A 출판사’의 교과서에서 아리스타르코스는 삼각비를 학습한 후에 등장하기 때문에 학생들은 삼각비의 개념과 활용에 대한 지식을 갖추었기 때문에 정상적으로 수업을 들은 학생은 충분히 이해할 수 있을 것으로 판단한 것이다. 이와 대조적으로 ‘B 출판사’의 아리스타르코스 방법을 기술한 내용은 표면적으로는 ‘A 출판사’와 비슷한 구조와 비슷한 분량으로 기술되었지만, 아리스타르코스 방법으로 지구-달 거리와 지구-태양 거리비를 계산하는데 필요한 정보인 태양-지구-달이 이루는 각을 제시하지 않고 있다. 이것은 ‘B 출판사’의 아리스타르코스 방법의 내용이 교과서에 초반에 도입하는 것에 이유가 있다고 판단된다. 즉, ‘B 출판사’의 교과서에서 아리스타르코스 방법은 삼각비의 개념과 활용을 학습하기 전에 등장하는 삼각비의 필요성에 대한 동기 유발의 주된 목적의 자료로 사용되었을 뿐 아리스타르코스 방법의 깊이 있는 탐구를 진행할 목적은 부수적인 것으로 판단했을 것이라 생각된다. 특히, 이러한 이유는 ‘C 출판사’의 교과서를 보면 다시 확인할 수 있는데, ‘C 출판사’는 아리스타르코스 방법을 삼각비 개념과 활용을 배우고 난 후에 등장하는 것으로 ‘A 출판사’와 동일하다. 또한, 구체적 수치를 제공하고 실제 사인값을 이용하여 지구-달 거리와 지구-태양 거리의 비를 아리스타르코스가 측정했던 방법을 수학적으로 재현하였다. 즉, 아리스타르코스 방법을 단원 초기에 배치하느냐 단원 마지막에 배치하느냐에 따라서 다루는 내용과 깊이 전개 방식 등이 충분히 유동적으로 변화할 수 있음을 알 수 있다.

3.2. 재구성된 모델링 과제 적용을 통한 학생들의 탐구 특성 분석

3.2.1 아리스타르코스 방법에 대한 타당성에 대한 논의

학생들은 아리스타르코스가 관측한 측정값을 바탕으로 달의 크기를 계산하는 과정을 수행하였다. 학생들의 대부분은 삼각형의 닮음, 공학용 계산기를 이용한 삼각비의 계산 값을 활용하여 그림 7과 같이 달의 지름을 계산해 내었다. 하지만, 계산된 결과 4,491km는 실제 달의 지름 약 3,700km와는 약 21.38%의 오차를 가지고 있어, 학생들은 아리스타르코스 방법에 대한 타당성에 대해서는 표 6과 같이 다른 반응을 보였다.

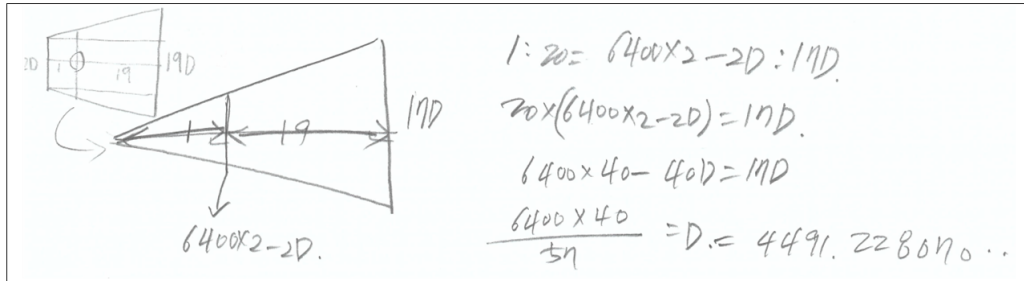


그림 7. 아리스타르코스가 측정한 값을 바탕으로 한 달의 크기(학생 A)

학생들에게 있어 아리스타르코스 방법의 수학적 타당성(Mathematical Validity)을 판단하는 결정적 기준은 ‘이론적 정밀함’보다는 ‘실제값과의 부합 정도’에 있었다. 즉, 논리적으로 타당한 추론 과정이라 할지라도 도출된 결과가 실제 천문 데이터와 큰 오차를 보일 경우, 학생들은 이를 수학적인 해결책으로 수용하기보다 불완전하거나 비수학적인 방법으로 간주하는 경향을 보였다.

표 6. 아리스타르코스 방법의 수학적 타당성에 대한 학생들의 답변

	A-4. 아리스타르코스 방법은 수학적으로 타당하다고 볼 수 있는가?
학생 A	방법은 수학적으로 타당하나 오차가 심해서 값이 다르게 나왔다.
학생 B	타당하다. 특정값에 오류. 수학적 접근 방법, 계산 과정(모순과정) 안 오류X.
학생 C	오차가 너무 커서 타당X
학생 D	22% 오차율을 볼때 타당하지 않다.

이러한 인식을 바탕으로 그림 8과 같이 지오지브라를 활용하여 지구에서 관측되는 반달의 위상을 정밀하게 모델링한 결과, 태양-지구-달이 이루는 각의 크기가 89.85°임을 실측할 수 있었다. 이 측정값을 삼각비 모델에 적용하면 지구-달과 지구-태양의 거리 비는 약 1 : 382로 계산되며, 이는 현대 천문학의 실제 비례인 1 : 400에 매우 근접한 수치이다. 중학교 3학년 수학 교과서가 제시하는 1 : 19(87°기준)와 비교할 때, 공학 도구를 통한 수치 보정은 모델의 신뢰도를 획기적으로 높여주었다. 또한, 지오지브라의 동적 시뮬레이션을 통해 월식 상황을 구현한 결과, 지구 본그림자와 달의 크기 비가 약 2.8 : 1이 됨을 찾아내었다.

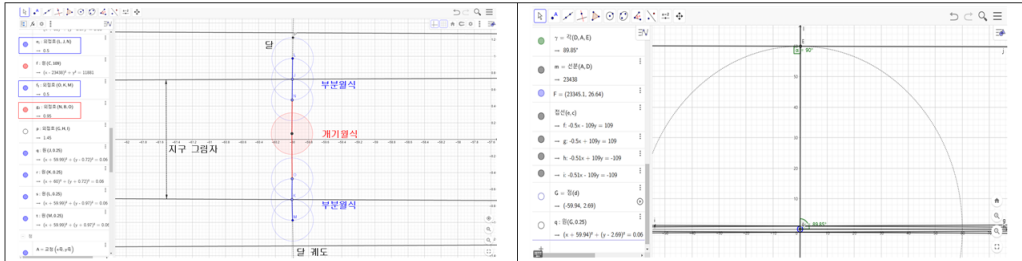


그림 8. 지오지브라를 활용한 월식 현상 재현 및 개선된 측정값 도출

학생들은 이러한 정밀 실측 데이터들을 통합하여 그림 9와 같이 달의 실제 크기를 산출하였으며, 이 과정에서 자신들이 구축한 수학적 모델이 실제 우주의 물리적 수치와 일치함을 확인함으로써 비로소 모델의 타당성을 확신하는 모습을 보였다.

초기 단계에서 학생들은 현대의 실제 측정값과 약 20% 이상의 오차를 보이는 아리스타르코스의 결과치에 주목하여, 해당 방법론이 수학적으로 정밀하지 못하거나 불완전하다는 비판적 평가를 내렸다. 그러나 동적 기하 도구인 지오지브라를 활용하여 실제 천문 비례를 반영한 모델을 구축하고, 이를 통해 개선된 측정값(89.85°)을 도출하는 과정에서 학생들의 인식은 전환되었다.

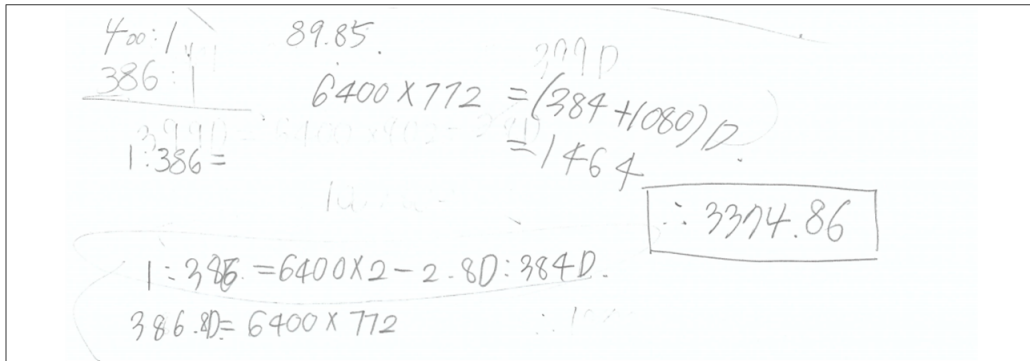


그림 9. 아리스타르코스가 측정한 값을 바탕으로 한 달의 크기(학생 B)

학생들은 공학적으로 보정된 데이터를 바탕으로 산출한 달의 크기가 현대의 측정값과 매우 근소한 차이만을 보인다는 사실을 확인하였다. 이를 통해 아리스타르코스가 제안한 기하학적 추론 모델 자체는 수학적으로 매우 타당함을 인정하게 되었으며, 기존의 거대한 오차는 방법론의 결함이 아닌 당시 관측 기술의 한계에 따른 측정 오차에서 비롯된 것임을 그림 10과 같이 기술하였다. 즉, 학생들은 공학 도구를 매개로 ‘모델의 구조적 타당성’과 ‘데이터의 정밀성’을 구분하여 이해하는 고차원적인 수학적 모델링 역량을 보여주었다.

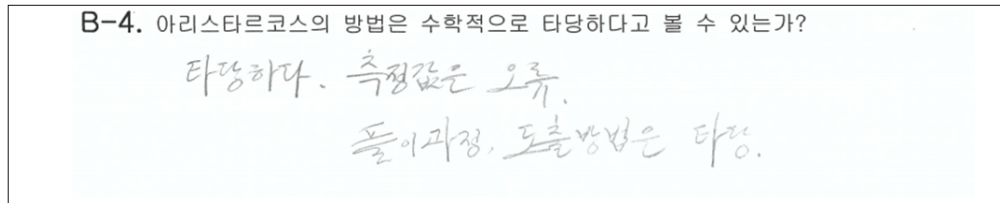


그림 10. 아리스타르코스가 측정한 값을 바탕으로 한 달의 크기(학생 B)

3.2.2 모델링 과정에서의 인지적 장벽(Cognitive Barriers)과 수학적 형식화의 어려움
학생들이 아리스타르코스의 기하학적 모델을 현대적 수치로 재구성하는 과정에서, 단순한 계산 이상의 인지적 충돌과 수치 해석상의 어려움이 관찰되었다. 먼저, 삼각비의 계산 결과값과 이를 정수비로 전환하는 형식화 과정에서의 문제이다. 그림 11과 같이 학생 A는 지구에서 달까지의 거리(a)와 지구에서 태양까지의 거리(b)의 비를 $\cos 87^\circ$ 로 표현하였다. 그러나 이를 아리스타르코스가 제시한 1:19라는 간결한 정수비로 변환하는 과정에서 인지적 어려움을 겪은 것으로 보인다. 학생 A는 $a : b = 0.05233 \dots : 1$ 이라는 소수점 수치를 확인한 뒤, a 의 대응값에 19를 곱한 결과가 1에 근사한다는 사실을 역으로 찾아가는 과정에서 정수비 모델로의 이행에 생소함을 느낀 것으로 판단된다. 이는 실측치(소수)를 기하학적 모델(정수비)로 단순화하는 과정에서 발생하는 수치적 간극을 해석하는 데 어려움이 있었음을 시사한다.

$$\frac{a}{b} = \cos 87^\circ$$

$$\cos 87^\circ = 0.05233 \dots$$

$$19 \times 0.05233 \dots = 0.99427 \dots$$

$$1에 근접$$

$$b = 19$$

그림 11. 학생 A의 $\cos 87^\circ$ 삼각비의 정수비 표현 과정

또한, 학생 C는 과제 B의 계산 결과로 3,377km를 얻었지만, 제시된 달의 크기인 3,400km와 약 23km의 오차가 발생했다는 점을 근거로 아리스타르코스 방법이 옳바르지 않다고 판단하였다. 이는 공학적 도구를 이용한 근사값 수용에 대한 인식을 정립되기 전, 측정값이 아무리 정밀하더라도 수학적 모델이 참값과 완전히 일치하지 않으면 이를 ‘실패’로 간주하는 학생들의 경향을 보여준다. 즉, 학생들이 수학적 모델을 ‘현상을 설명하는 근사적 도구’로 보기보다, ‘단 하나의 완벽한 정답을 찾아내는 공식’으로 인식하고 있음을 시사한다.

결과적으로 아리스타르코스의 측정법은 그 자체로 매우 정교한 수학적 모델링의 정수를 담고 있으며, 학생들이 현대적인 공학 도구를 통해 직접 정밀한 측정값을 탐색하고

보정할 수 있는 환경이 제공된다면 충분히 혁신적인 교육적 소재로 활용될 수 있음을 시사한다.

이는 교과서에 고정된 수치로 제시된 고대 지식을 학생들이 직접 재구성하고 타당화 하는 과정을 통해, 수학이 단순히 정해진 답을 찾는 도구가 아니라 현상을 논리적으로 구조화하고 끊임없이 개선해 나가는 동적인 학문임을 체감하게 하는 유의미한 교육적 경험을 제공한다.

본 연구에서 설계한 과제를 단계별로 수행함에 따라, 표 7과 같이 측정값이 아리스타르코스의 고대 수치에서 현대의 천문학적 실재(Reality)로 수렴해가는 과정을 확인할 수 있다. 특히 ‘과제 B’와 ‘과제 C’의 수행은 NASA의 실측 데이터와 기하학적 모델링을 통해 고대 모델의 오차 원인을 수학적으로 규명해가는 핵심적인 단계이다.

표 7. 측정 방식 및 과제 수행 단계별 주요 수치 비교

연번	구분	달의 지름 : 지구 그림자	태양-지구-달이 이루는 각	비교
1	아리스타르코스의 측정값	1 : 2	87°	
2	과제 B 수행 후	1 : 2.8	89.85°	
3	과제 C 수행 후	1 : 2.65	-	
4	현대의 측정값	1 : 2.67 ²⁾	89.85°	

3.3. 천문 실측 데이터를 활용한 역사적 월식의 고증 및 아리스타르코스 생애 연대 특정

아리스타르코스와 관련된 내용을 다루는 중학교 3학년 교과서는 학교 현장에서 사용되고 있는 교과서 10종 중 5종이며, 아리스타르코스를 언급한 5종의 교과서에서는 아리스타르코스의 생애를 B.C. 320~B.C. 250(출판사 A, B, E, F) 또는 B.C. 310~B.C. 230(출판사 C)으로 제시하고 있다.

본 연구에서는 분석 대상인 5종 교과서별로 상이하게 서술된 아리스타르코스의 추정 생애를 고려하여, 그의 주요 활동 시기로 예상되는 기원전 320년부터 기원전 230년 사이의 월식을 전수 조사하였다.

미국 항공우주국(NASA)은 기원전 1999년부터 기원후 3000년까지 약 5000년 동안 발생한(또는 발생할) 12,064건의 월식 데이터를 웹³⁾ 기반으로 제공하고 있다. 본 연구자는 아리스타르코스의 생존 추정 시기인 기원전 320년 3월 7일부터 기원전 230년 10월 25일 사이에 발생한 월식 현상을 전수 조사하였다.

²⁾ 지구 본그림자와 달의 상대적 크기 비에 관한 구체적인 수치적 산출 근거는 Jean Meeus의 ‘Astronomical Algorithms’(1998)에서 제공하는 본그림자 반지름 계산 공식을 참조하였음.

³⁾ <https://eclipse.gsfc.nasa.gov/LEcat5/LEcatalog.html>

해당 기간 중에는 총 206회의 월식(개기월식 81회, 부분월식 53회, 반영월식 72회)이 발생한 것으로 확인되었다. NASA에서 제공하는 월식 지속 시간 데이터의 구성을 분석하면, ‘부분월식 지속 시간’은 개기월식 시간을 포함하는 전체 진행 시간을 의미한다. 따라서 식의 진입 시와 진출 시의 부분월식 지속 시간이 동일하다고 가정할 때, NASA의 데이터는 “부분월식 시간 = 진입 부분월식 시간(a) + 개기월식 시간(b) + 진출 부분월식 시간(a)”의 구조를 갖는다. 즉, 아리스타르코스가 비교한 두 시간의 관계는 이 공식을 통해 현대적 수치로 재구성 및 검증이 가능하다.

따라서, NASA에서 제공하는 부분월식 시간(Par.)은 개기월식 시간(Tot.)의 3배가 되어야 한다. 따라서, 206개의 자료 중 개기월식이 일어난 횟수는 81회이며, 부분월식 시간에서 개기월식 시간을 3배하고 뺀 값(k , $\text{Par.} - \text{Tot.} \times 3$)이 작을수록 아리스타르코스의 관측 결과를 잘 반영하므로 $|k| > 20$ 인 경우를 제외하고 k 값에 대한 오름차순 정렬하여 표 8을 얻었다.

표 8. 개기월식 81회 중 $k(-20 \leq k \leq 20)$ 의 값에 따른 몇 가지 월식에 관한 정보

연번	일시			식의 지속 시간(분)		k	a	b	e(%)
	년	월	일	Par.	Tot.				
1	-279	Jan	4	220.3	80.1	-20	70.1	80.1	14.3
2	-319	Aug	21	214.7	76.8	-15.7	69.0	76.8	11.4
3	-308	Jul	20	222.8	79.5	-15.7	71.7	79.5	11.0
4	-261	Jan	15	219.9	77.5	-12.6	71.2	77.5	8.8
5	-254	Feb	26	199.8	70.6	-12	64.6	70.6	9.3
6	-264	Sep	11	224.2	78.7	-11.9	72.8	78.7	8.2
7	-282	Mar	7	203.5	71.6	-11.3	66.0	71.6	8.6
8	-271	Jul	30	209.8	70.9	-2.9	69.5	70.9	2.1
9	-319	Feb	24	213.8	72.1	-2.5	70.9	72.1	1.8
10	-243	Jan	26	218.8	73.1	-0.5	72.9	73.1	0.3
11	-235	Feb	26	205.4	67.8	2	68.8	67.8	1.5
12	-236	Mar	8	196.9	61.2	13.3	67.9	61.2	9.8
13	-301	Sep	1	211.5	65.6	14.7	73.0	65.6	10.1
14	-282	Aug	31	220.6	68.5	15.1	76.1	68.5	9.9
15	-311	Mar	27	221.4	68.6	15.6	76.4	68.6	10.2
16	-300	Feb	25	200.6	61.6	15.8	69.5	61.6	11.4

아리스타르코스는 월식의 과정을 육안으로 관측하며 시간을 측정하였고, 그 결과 진입 부분월식 시간(a)과 개기월식 시간(b)이 일치한다는 결론에 도달하였다. 그러나 이는 정밀한 계측기나 광학 장비 없이 수행된 관측이므로 일정한 측정 오차가 내재될 수밖에 없다.

이에 본 연구자는 아리스타르코스의 관측 과정에서 발생 가능한 오차 범위를 정량화하기 위하여, 진입 부분월식 시간(a)을 기준으로 개기월식 시간(b)과의 차이를 비율로 산출한 관측오차율(e)을 다음과 같이 정의하였다.

$$e = \left| \frac{a - b}{a} \right| \times 100(\%)$$

이 관측오차율(e)이 5%⁴⁾ 미만인 사례, 즉 아리스타르코스의 시간 일치(a=b) 가설에 극히 근접한 천문 자료를 대상으로 분류한 결과, 그림 12와 같이 최종적으로 네 건의 월식을 특정할 수 있었다.

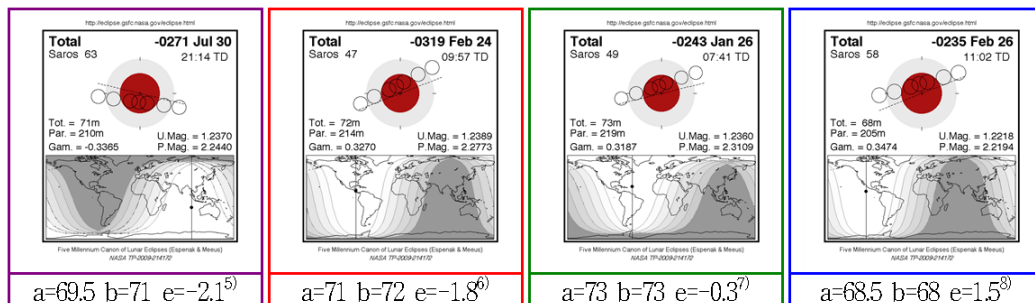


그림 12. 관측오차율 5% 미만인 역사적 월식 후보군 추출 결과

이제 네 건의 월식 후보 중에서 아리스타르코스가 관측한 것으로 추정되는 월식을 특정하도록 하겠다. NASA에서는 시대-지역별 월식을 원하는 지역에서 월식이 일어나는 시간과 달의 고도 등에 관한 정보를 자세하게 제공하고 있다.

표 9. NASA에서 제공하는 시대-지역별 관측 가능 월식 자료⁹⁾

Calendar Date	Pen. Begins	Alt	Par. Begins	Alt	Tot. Begins	Alt	Mid.	Alt	Tot. Ends	Alt	Par. Ends	Alt	Pen. Ends	Alt
-319-Feb-24	05:06	+19	06:12	+06	07:23	-09	07:59	-16	08:35	-23	09:46	-35	10:52	-44
-271-Jul-30	16:39	-28	17:42	-15	18:51	-01	19:27	+05	20:02	+11	21:11	+23	22:14	+31
-243-Jan-26	03:00	+50	04:11	+35	05:24	+20	06:00	+13	06:37	+06	07:50	-08	09:00	-21
-235-Feb-26	No	Data												

⁴⁾일반적인 통계적 유의수준이나 육안 관측의 한계를 고려한 임의의 임계값(Threshold)

⁵⁾<https://eclipse.gsfc.nasa.gov/5MCLEmap/-0299-0200/LE-0271-07-30T.gif>

⁶⁾<https://eclipse.gsfc.nasa.gov/5MCLEmap/-0399-0300/LE-0319-02-24T.gif>

⁷⁾<https://eclipse.gsfc.nasa.gov/5MCLEmap/-0299-0200/LE-0243-01-26T.gif>

⁸⁾<https://eclipse.gsfc.nasa.gov/5MCLEmap/-0299-0200/LE-0235-02-26T.gif>

⁹⁾<https://eclipse.gsfc.nasa.gov/JLEX/JLEX-AF.html>

표 9는 앞에서 아리스타르코스가 관측한 것으로 추정되는 월식에 관한 정보를 아프리카 대륙의 이집트-알렉산드리아에서 관측되었을 것이라고 계산된 결과를 정리한 것이다. 이탤릭체(또는 기울어진 글씨)로 표시 부분은 알렉산드리아에서 관측이 불가능한 시간대를 말해주며, 기원전 235년 2월 26일에 발생한 월식은 이집트 알렉산드리아 지역에서 반영월식, 부분월식, 개기월식을 포함한 어떠한 식의 위상도 관측할 수 없는 조건인 것으로 확인되었다. 이에 따라 해당 날짜의 관측 데이터는 ‘데이터 없음(No Data)’으로 분류되었으며, 이는 해당 지역이 월식의 가시 범위(Visibility)에서 완전히 벗어나 있었음을 의미한다. 따라서 이 월식은 아리스타르코스가 자신의 기하학적 이론을 정립하기 위해 활용했을 실제 관측 후보군에서 제외하는 것이 타당하다.

기원전 319년 2월 24일에 발생한 월식의 경우, 이집트 알렉산드리아 지역에서는 진입 반영월식(Pen.Begins)과 진입 부분월식(Par.Begins)의 일부만 관측이 가능할 뿐이다. 식의 진행 도중 달이 지평선 아래로 몰각(Setting)함에 따라, 이후의 주요 위상인 개기월식 전 과정(Tot.Begins Tot.Ends)과 진출 부분월식(Tot.Ends) 및 반영월식(Par.Ends) 등은 관측이 불가능한 것으로 분석되었다. 또한, 교과서에서 추정하는 아리스타르코스의 출생 연도가 기원전 320년경임을 고려할 때, 생후 1년 남짓한 시점에 발생한 이 월식을 그가 직접 관측하여 정교한 기하학적 추론의 근거로 삼았다고 보기에는 역사적 개연성이 현저히 떨어진다. 따라서 이 월식 역시 아리스타르코스가 활용한 실제 관측 자료에서 제외하는 것이 타당하다.

기원전 271년 7월 30일 월식의 세부 정보를 분석한 결과, 알렉산드리아 지역에서는 진입 반영월식부터 진입 부분월식, 그리고 개기월식의 초입 단계까지 모두 달이 뜨기 전(Moonrise 이전)에 발생하여 관측이 불가능했던 것으로 나타났다. 개기월식이 최대(Maximum)에 도달했을 시점의 달의 고도(Alt)는 약 $+5^\circ$ 로, 지평선 극인접 지점에서만 제한적인 관측이 가능했을 뿐이다. 이후 식의 종료 단계인 진출 부분월식과 반영월식 등은 관측 가능 범위에 있었으나, 이는 아리스타르코스가 기록한 진입 부분월식 시간(a)과 개기월식 지속 시간(b)의 일치라는 핵심적인 관측 조건을 충족하지 못한다. 즉, 식의 전반부 데이터가 결여된 이 월식은 아리스타르코스가 기하학적 추론의 근거로 삼았던 실제 관측 사례로 보기 어렵다. 따라서 기원전 271년 7월 30일 월식 역시 최종 후보에서 제외함이 타당하다.

기원전 243년 1월 26일에 발생한 월식은 진입 반영월식부터 진입 부분월식, 개기월식의 최대 위상, 그리고 진출 부분월식의 상당 과정을 알렉산드리아 지역에서 명확히 관측할 수 있었던 것으로 분석되었다. 비록 식의 종료 시점인 진출 부분월식의 말기와 진출 반영월식 단계에서는 달의 고도가 낮아져 관측이 제한되었으나, 이는 아리스타르코스가 지구 본그림자와 달의 크기 비를 산출하는 기하학적 추론 과정에 있어 필수적인 정보가 아니다. 그의 핵심 논리는 진입 부분월식의 전 과정(a)과 개기월식의 전체 지속 시간(b)을 직접 비교하는 데 있으며, 기원전 243년 1월 26일에 일어난 월식은 이 두

핵심 위상이 관측 가능한 고도에서 완벽하게 전개되었다. 따라서 이 월식은 아리스타르코스가 기록한 시간 일치($a=b$)의 경험적 근거를 가장 정확하게 설명해 주는 실증적 사례라 할 수 있다. 이상의 분석을 종합할 때, 아리스타르코스가 자신의 천문학적 체계를 정립하는 데 사용한 실제 월식은 기원전 243년 1월 26일의 현상이었음을 강력하게 시사한다. 이상을 정리하면 그림 13과 같이 나타낼 수 있다.

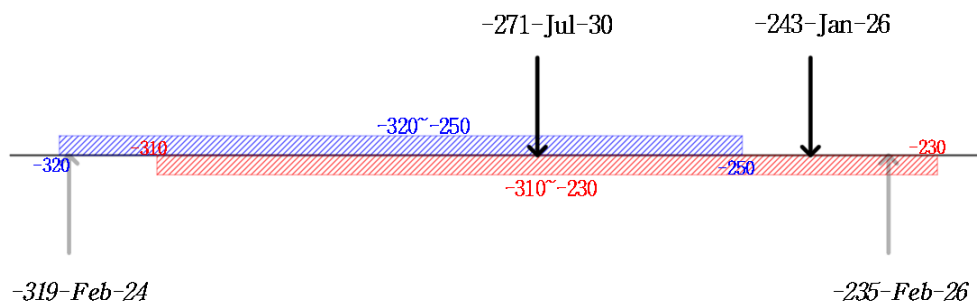


그림 13. 아리스타르코스가 관측한 것으로 추정되는 월식과 그의 생애

아리스타르코스의 생애를 교과서에서 기원전 320년부터 기원전 250년(출판사 A, B, E, F) 또는 기원전 310년부터 기원전 230년(출판사 C)으로 나타내고 있다. 본 연구 결과에 의하면 아리스타르코스가 관측한 월식은 기원전 243년경에 일어난 월식으로 이것은 아리스타르코스의 생애를 기원전 320년부터 기원전 250년이라고 설정한다면 아리스타르코스가 달의 크기를 측정하기 위한 월식 현상을 관측할 수가 없다. 따라서 본 연구의 천문학적 고증 결과는 아리스타르코스의 활동 시기가 기원전 243년경의 월식 기록과 일치함을 보여주며, 이는 그의 사망 연도가 기원전 243년 이후로 산출될 수 있음을 시사한다

4. 결론 및 제언

본 연구는 중학교 3학년 수학 교과서에 제시된 아리스타르코스 측정법의 기술 양상을 비판적으로 분석하고, 이를 지오지브라를 활용한 실제적 모델링 과제로 재구성하여 학생들에게 적용함으로써 그 교육적 가치와 인식 변화의 과정을 탐색하였다. 연구를 통해 도출된 주요 결론은 다음과 같다.

첫째, 교과서 분석을 통해 아리스타르코스 측정법이 단위 내 배치 위치(TH/TT)에 따라 탐구의 깊이와 성격이 극명하게 갈린다는 점을 확인하였다. 대다수의 교과서는 아리스타르코스의 측정법을 삼각비 단원의 도입부나 읽을거리로 배치하며, 실제 관측

오차를 무시한 87° 라는 고정된 수치를 정답처럼 제공하고 있었다. 이러한 정제된 데이터의 제공은 학생들이 모델의 정밀도를 의심하거나 스스로 데이터를 보정할 기회를 원천적으로 차단한다. 결과적으로 교과서의 구성 방식은 수학적 모델링의 핵심 단계인 타당화를 약화시키고, 수학적 지식을 역사적으로 완성된 박제된 사실로 수용하게 만드는 한계를 보였다.

둘째, 공학 도구를 활용한 모델링 수업은 학생들에게 강력한 인지적 갈등을 유발하고, 이를 통해 수학적 타당성에 대한 근본적인 인식 변화를 이끌어냈다. 학생들은 실제 천문 비례(1 : 60 : 109)를 반영한 지오지브라 모델링 과정에서, 교과서가 제시한 87° 를 적용했을 때 달의 위상이 반달이 되지 않는 시각적 모순을 목격하였다. 초기에는 약 20%에 달하는 현대적 참값과의 오차를 근거로 아리스타르코스의 방법을 비수학적이라 폄하하던 학생들이, 지오지브라를 통해 실측치인 89.85° 와 그림자 비 2.8을 도출하며 참값에 근접한 결과를 얻자 방법론의 구조적 타당성을 인정하기 시작했다. 이는 학생들이 계산 결과의 정확성이라는 결과 중심적 사고에서 벗어나, 모델의 논리적 정합성과 측정 오차의 구분이라는 고차원적 인식론적 전환을 경험했음을 시사한다.

셋째, 정밀 모델을 활용한 역사적 상황의 역추정 활동은 수학적 지식의 역동성을 체감하게 하는 유효한 기제가 되었다. 학생들은 도출된 정밀 모델을 역이용하여 아리스타르코스가 관측했을 법한 특정 월식 상황을 추론(과제 D)함으로써, 고대 지식을 21세기의 시각으로 재구성하는 고차원적 탐구를 수행하였다. 이 과정에서 학생들은 수학적 지식이 고정불변의 결과물이 아니라, 공학적 도구의 발전과 데이터의 정교화에 따라 끊임없이 진화하고 보정되는 살아있는 모델링의 과정임을 깨달았다. 이는 역사적 발생적 원리에 기반한 수학교육이 공학적 도구와 결합했을 때 발휘할 수 있는 교육적 시너지를 입증한 결과이다.

넷째, NASA의 시대·지역별 월식 데이터를 활용하여 아리스타르코스가 실제 관측에 사용한 월식을 추적한 결과, 기원전 243년 1월 26일의 월식을 역사적 실재로 특정하였다. 알렉산드리아 지역의 관측 조건을 분석했을 때, 기원전 271년 7월 30일의 월식은 주요 위상이 지평선 아래에 있어 그의 기하학적 기록과 부합하지 않았으나, 기원전 243년 1월 26일의 월식은 부분월식 진입부터 전 과정이 관측 가능하여 그의 추론을 완벽하게 뒷받침하였다. 이러한 천문학적 고증은 아리스타르코스의 생애를 기원전 310년부터 기원전 230년으로 보는 견해에 강력한 실증적 근거를 제공하며, 수학적 모델링이 역사학적 난제를 해결하는 학제적 도구로 기능할 수 있음을 입증하였다. 이상의 연구 결과를 바탕으로 향후 수학교육 현장과 교육과정 구성을 위해 다음과 같이 제언하고자 한다.

첫째, 역사적 소재를 활용한 교과서 구성 방식의 패러다임 전환이 필요하다. 현재와 같이 아리스타르코스 측정법을 단순한 동기유발이나 흥미 위주의 읽을거리로 소모하기 보다, 학생들이 직접 불완전한 데이터를 조작하고 보정해 나가는 개방형 모델링 과제로

전환하는 것이 필요해 보인다. 교과서가 정제된 수치(87°)만을 일방적으로 제공하기보다, 실제 관측의 한계와 그로 인한 오차의 가능성을 열어둘 때 비로소 학생들은 비판적 데이터 검토 역량을 기를 수 있다.

둘째, 수학교육에서 공학 도구의 위상을 계산의 도구에서 탐구와 타당화의 기제로 재정립해야 한다. 본 연구에서 확인된 바와 같이, 지오지브라는 단순한 수치 계산을 넘어 학생이 세운 수학적 가설이 실제 현상과 얼마나 부합하는지 시각적으로 검증해주는 강력한 타당화의 도구로 기능하였다. 따라서 테크놀로지를 활용한 수업 설계 시, 단순 기능 익히기를 넘어 자신의 모델을 정교화하고 타당화하는 프로세스가 반드시 포함되어야 할 것이다.

셋째, 수학교육의 실제성(Authenticity) 확보를 위해 실제 현실의 스케일과 데이터를 적극적으로 도입해야 한다. 천문학적 현상을 수학적으로 구조화하는 과정에서 1 : 60 : 109와 같은 실제 비례와 현대적 참값을 사용하는 것은 학생들에게 단순한 문제 풀이를 넘어선 지적 희열을 제공한다. 이러한 실제적 수치의 힘은 학생들로 하여금 수학적 추론이 현실 세계를 설명하는 강력한 도구임을 깨닫게 하며, 이는 수학 학습에 대한 내재적 동기를 유발하는 강력한 원동력이 될 것이다.

References

1. Chang, K. Y., Kang, H. Y., Kim, D. W., An, J. M., Lee, D. H., Hong, E. J., Lee, M. Y., Kim, M. J., Song, E. Y., Ha, S. S., Jee, Y. M., & Ku, N. Y. (2020). *Middle School Mathematics 3*. Jihaksa.
2. Go, H. K., Kim, E. J., Kim, J. H., Gu, N. Y., Kim, S. J., Kim, J. H., Na, K. S., Park, J. H., Choe, H. J., & Ha, S. S. (2020). *Middle School Mathematics 3*. Kyohaksa.
3. Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1), 5-23. <https://doi.org/10.1023/A:1012737227365>
4. Heo, N. G. (2018). Mathematical exploration of astronomical phenomena using dynamic geometry software. *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction*, 18(21), 949-968. <http://dx.doi.org/10.22251/jlcci.2018.18.21.949>
5. Hwang, H. J. (2007). Understanding of mathematical modelling: Focusing on the analysis of domestic research results. *School Mathematics*, 9(1), 65-97.
6. Hwang, S. W., Kang, M. G., Kim, H. J., Lee, K. S., Lee, J. H., & Choe, S. H. (2020). *Middle School Mathematics 3*. Mirae N.
7. Jahnke, H. N. (2007). Proofs and hypotheses. *ZDM - Mathematics Education*, 39(1), 79-86. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0006-z>
8. Ju, M. K., Paik, S. Y., Lee, K. H., Park, J. H., Kim, H. J., & Lee, J. Y. (2020). *Middle School Mathematics 3*. Kumsung Publishing.

9. Jung, H. Y. (2023). Analyzing an elementary school teacher's difficulties and mathematical modeling knowledge improvement in the process of modifying a mathematics textbook task to a mathematical modeling task: Focused on an experienced teacher. *The Mathematical Education*, **62**(3), 363-380. <https://doi.org/10.7468/mathedu.2023.62.3.363>
10. Kang, O. K., Kweon, N. H., Kim, R. G., Kim, T. H., Kim, H. J., Park, S. Y., Bak, J. S., Lee, K. S., & Ha, S. S. (2020). *Middle School Mathematics 3*. Dong-A Publishing.
11. Kim, H. K., Cho, S. J., Kim, K. B., Lee, K. G., Kim, J. H., & Shin, K. H. (2020). *Middle School Mathematics 3*. Joongang Sinsago.
12. Kim, W. K., Cho, M. S., Bang, K. S., Yoon, J. H., Lee, S. J., & Lim, J. H. (2020). *Middle School Mathematics 3*. Visang Education.
13. Kuhn, T. S. (2022). *The Copernican Revolution: Planetary astronomy in the development of Western thought* (B. E. Suh & D. K. Kim, Trans.). Kyung Moon Sa. (Original work published 1957)
14. Kwon, H. Y., Jang, Y. J., Cho, A. R., & Kwon, O. N. (2022). Specification of high school mathematical modeling instruction design applying pedagogical architecture. *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction*, **22**(21), 609-629. <https://doi.org/10.22251/jlcci.2022.22.21.60>
15. Lee, J. Y., Choe, B. R., Seong, J. S., Kim, H. C., Bak, H. S., Lim, Y. B., Cho, S. B., & Choi, Y. K. (2020). *Middle School Mathematics 3*. Chunjae Education.
16. Ministry of Education (2022). *Mathematics Curriculum* [Notification No. 2022-33, Separate Volume 8].
17. NASA (2024). Five millennium catalog of lunar eclipses: -1999 to +3000. NASA Goddard Space Flight Center. <https://eclipse.gsfc.nasa.gov/lunar.html>
18. Park, K. S., Choe, Y. S., Park, M. K., Kim, S. H., Park, J. H., Lim, S. H., & Kim, S. J. (2020). *Middle School Mathematics 3*. Dong-A Textbook.
19. Park, S. Y., & Han, S. Y. (2018). Examples and application of reformulating textbook problems reflecting the mathematical modeling process. *The Mathematical Education*, **57**(3), 289-309. <https://doi.org/10.7468/mathedu.2018.57.3.289>
20. Ryu, H. C., Ryu, S. G., Shin, B. M., Kang, S. K., Kim, S. J., & Chae, E. J. (2020). *Middle School Mathematics 3*. Chunjae Textbook.
21. Villarreal, M. E., Esteley, C. B., & Smith, S. (2018). Pre-service teachers' experiences within modelling scenarios enriched by digital technologies. *ZDM – Mathematics Education*, **50**(1), 251-263. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0925-5>

^aSANG JE CHO, TEACHER, MYUNGSHIN HIGH SCHOOL:

Email address: **seadevil@hanmail.net**

^bMINSHIK CHO, PROFESSOR, DEPARTMENT OF MATHEMATICS EDUCATION, KOREA NATIONAL UNIVERSITY OF EDUCATION:

Email address: **mscho@knue.ac.kr**