

일반화를 통한 HORADAM 수열에서의 항등식 유도 A STUDY ON DERIVATION OF IDENTITIES FOR THE HORADAM SEQUENCE THROUGH GENERALIZATION

허남구^{a,*}

ABSTRACT. Analogical reasoning helps extend mathematical concepts and can be used as a heuristic for solving mathematical problems. In this study, identities of the Horadam sequence were conjectured through conceptual analogy, and the conjectured identities were proved through methodological analogy. In addition, further methods for proving the identities were presented using matrix powers, determinants, and the Cayley–Hamilton theorem. This study is expected to help preservice and inservice teachers experience the process of formulating and justifying mathematical conjectures through analogical reasoning, and to serve as instructional material for providing gifted students with opportunities to gradually expand their mathematical knowledge by using analogical reasoning.

1. 서론

유추적 사고는 유사한 두 대상에 대하여 한 대상이 가지고 있는 특성을 다른 대상도 가지고 있을 것이라고 추론하는 것으로 수학적 개념의 발달이나 수학 문제 해결에 자주 활용된다([4, 11, 14-16]). 특수한 사례로부터 일반화한 대상은 특수한 사례와 구조적으로나 표면적으로 유사한 측면이 있다. 따라서 유추적 사고는 특수한 사례와 일반화한 대상 사이의 유사성을 바탕으로 수학적 성질을 일반화하는 데에도 활용될 수 있는데, 대표적으로 형식 불역의 원리를 통한 수학적 개념의 확장도 유추적 사고를 이용한 것으로 볼 수 있다([12]). Han([3]), Heo([5]), Kim과 Park([10])은 특수한 사례와 일반화한 대상 사이의 유사성이 있다는 가정 아래, 특수한 사례의 성질로부터 일반화된 수학적 대상의 성질을 추측하고 이를 정당화하였다. Han([3])은 유추적 사고를 이용한 코사인 정리의 일반화를 연구하였으며, Kim과 Park([10])은 수학 영재 학생들이 유추적 사고를

Received by the editors April 10, 2026. Revised May 7, 2026. Accepted May 8, 2026.

2020 *Mathematics Subject Classification*. 97F60, 97I30.

Key words and phrases. Generalization, Analogical reasoning, Conceptual analogy, Methodological analogy, Horadam sequence

주요어 : 일반화, 유추적 사고, 개념 유추, 방법 유추, Horadam 수열

*Corresponding author.

© 2026 Korean Soc. Math. Edu.



이용하여 조립제법을 일반화하는 과정을 연구하였다. 또한 Heo([5])는 유추적 사고를 통하여 일반화된 피보나치 수열과 일반화된 펠 수열의 항등식을 유도한 후, 이를 일반화한 수열에서의 항등식을 도출하였다.

Erdniev와 Han([2])은 유추적 사고의 활용을 두 가지로 구분하였는데, 유사한 두 수학적 대상 사이에서 새로운 수학적 지식을 생성하는 유추를 개념 유추라고 하였으며, 수학 문제 해결에서 활용하는 유추를 방법 유추라 하였다. 즉, 개념 유추는 유사한 두 수학적 대상 A, B 에 대하여 A 가 성질 x 를 만족하면 B 도 성질 x 를 만족할 것으로 사고하는 것이다. 반면 방법 유추는 유사한 두 수학적 대상 A, B 에 대하여 A 가 방법 x 를 사용하여 해결할 수 있으면 B 도 방법 x 를 사용하여 해결할 수 있을 것으로 사고하는 것이다. 즉, 특수한 사례의 성질로부터 일반화된 수학적 대상의 성질을 추측하는 것은 개념 유추에 의한 것이며, 특수한 사례의 성질을 증명하는 방법을 활용하여 일반적인 대상의 성질을 증명하는 것은 방법 유추에 의한 것으로 볼 수 있다. 이는 특수한 사례로부터 일반화한 대상의 성질을 추측하고 정당화하는 과정이 개념 유추와 방법 유추를 활용한 것으로 볼 수 있음을 의미한다.

유추적 사고에서 유사한 두 대상은 바탕 영역과 목표 영역으로 구분하는 데, 이미 알고 있는 수학적 대상을 바탕 영역이라 하고, 바탕 영역의 성질과 대응하는 성질을 찾거나 문제 해결 방법을 적용하려는 수학적 대상을 목표 영역이라고 한다. 특수한 사례로부터 일반화하는 과정에서는 특수한 사례가 바탕 영역이 되고, 일반화한 대상이 목표 영역이 된다. 유추적 사고에서는 바탕 영역과 목표 영역의 두 수학적 대상 사이의 대응 관계를 찾는 것이 중요하다. 즉, 바탕 영역의 A, B 와 목표 영역의 C 에 대하여 A 와 C 가 대응할 때, B 에 대응하는 목표 영역의 D 를 찾는 것이 중요하다. 이때 $A : B = C : D$ 를 만족하는 적절한 D 를 목표 영역에서 찾는다면 유추적 사고를 통해 성질을 추측하거나 문제를 해결할 수 있으나, 부적절하게 대응하였을 때는 새로운 성질을 추측할 수 없거나([5]) 문제의 해결 방법을 찾을 수 없다([4]). 따라서 다양한 관점에서 바탕 영역과 목표 영역 사이의 대응 관계를 고려하고, 각 대응 관계가 적합한지에 대해 점검할 필요가 있다([4]).

Heo([6])는 피보나치 수열 $\{F_n\}$ 을 일반화한 수열을 일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$ 로 정의하고, 일반화된 피보나치 수열의 항등식을 증명하였다. 또한 Heo([5])는 일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$ 과 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$ 사이의 유사성을 바탕으로 개념 유추를 통해 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$ 의 항등식을 추측하였으며, 방법 유추를 통해 이 항등식을 증명하였다. 더 나아가 일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$ 과 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$ 을 일반화하여 초깃값이 $G_0 = a, G_1 = b$ 이고 점화관계가 $G_n = kG_{n-1} + G_{n-2}$ ($n \geq 2$)인 수열 $\{G_n\}$ 을 정의하고, 개념 유추와 방법 유추를 이용하여 수열 $\{G_n\}$ 에서의 항등식을 추측하고 증명하였다.

Heo([5])에서 정의한 수열 $\{G_n\}$ 은 초깃값이 $H_0 = a$, $H_1 = b$ 이고 점화관계가 $H_n = pH_{n-1} + qH_{n-2}$ 인 2차 선형 재귀 수열 $\{H_n\}$ 의 특수한 사례로 생각할 수 있으며, 이 수열 $\{H_n\}$ 은 Horadam 수열이라고 불린다([1, 7, 8, 9, 13]). 즉, Horadam 수열 $\{H_n\}$ 은 Heo([5])에서 정의한 수열 $\{G_n\}$ 을 일반화한 것이다. 이에 본 연구에서는 개념 유추를 활용하여 수열 $\{G_n\}$ 의 항등식에 대응하는 Horadam 수열 $\{H_n\}$ 에서의 항등식을 추측하고, 방법 유추를 활용하여 Horadam 수열 $\{H_n\}$ 에서의 항등식을 증명하고자 하였다. 또한 예비수학교사와 현직수학교사가 지닌 선형대수학 수준의 지식을 이용하여 Horadam 수열 $\{H_n\}$ 에서의 항등식을 증명하고자 하였다. 이를 위해 다음과 같이 연구 문제를 설정하였다.

첫째, 개념 유추를 활용하여 추측할 수 있는 Horadam 수열에서의 항등식은 무엇인가?

둘째, 방법 유추를 활용하여 Horadam 수열에서의 항등식은 어떻게 증명할 수 있는가?

셋째, 행렬을 이용하여 Horadam 수열에서의 항등식은 어떻게 증명할 수 있는가?

2. 연구의 배경

2.1. 수학교과에서의 유추적 사고

유추적 사고는 유사한 두 대상에 대하여 한 대상이 가지고 있는 특성을 다른 대상도 가지고 있을 것이라는 개연 추론의 방법이다([15]). 유추는 유사한 두 대상 A 와 B 에 대하여 A 가 특성 x 를 가지고 있으면 B 도 특성 x 를 가지고 있을 것이라는 추론인데, 이때 대상 A 를 바탕 영역이라 하고 대상 B 를 목표 영역이라 한다.

수학사에서 유추적 사고는 수학적 개념의 확장이나 문제 해결에 큰 역할을 하였다([4, 11, 12]). Lee([11])는 집합론의 발달 과정, 음수의 정의와 음수 사이의 연산을 체계화하는 과정, 복소수의 정의와 복소수 사이의 연산을 체계화하는 과정에서 유추가 활용되었으며, Euler가 Basel 문제를 해결하는 데에도 유추가 활용되었다고 하였다. 또한 Lee([12])는 형식 불역의 원리를 통한 수학적 개념의 확장과 일반화도 유추적 사고를 이용한 것이라고 하였다. 이처럼 유추를 이용하여 수학적 개념을 확장하거나 문제를 해결할 때는 바탕 영역의 특정 대상과 목표 영역의 특정 대상을 연결해야 한다.

유추적 사고에서는 바탕 영역과 목표 영역 사이의 대응 관계가 중요하다. Heo([4])는 예비수학교사를 대상으로 유사한 두 작도 문제의 해결에 관한 연구를 수행하였는데, 대부분의 예비수학교사는 바탕 영역과 목표 영역 사이의 부적절한 대응 관계로 인해 문제 해결에 관한 유추적 전이가 일어나지 않아 문제 해결에 실패하였다. 하지만 예비수학교사 1명이 바탕 영역에 속한 수학적 대상 사이의 관계를 재설정하고 이에 대응하는 목표

영역의 수학적 대상 사이의 관계로 대응시켰더니 유추적 전이가 일어나 문제 해결에 성공하였다. 이와 유사하게 Heo[5]의 연구에서도 일반화된 피보나치 수열과 일반화된 펠 수열 사이의 대응 관계에 따라 일반화된 펠 수열에서의 항등식을 도출할 수 있는지가 다르게 나타났다. 이처럼 유추적 사고를 활용하여 개념을 생성하거나 문제를 해결할 때는 바탕 영역과 목표 영역 사이의 대응 관계가 중요한 역할을 한다.

수학과 교수학습에서 유추적 사고는 중요하게 다루어지고 있다. 2022 개정 교육과정([14])은 도형의 성질을 이해하고 정당화하는 방법으로 유사성에 근거한 추론인 유추를 제시하고 있으며, 학생의 문제해결과 추론 역량을 함양하는 방법으로 각각 “문제해결 과정 및 결과의 의미를 재해석하여 주어진 문제를 변형하거나 새로운 문제를 만들어 해결하게 한다.”와 “귀납, 유추 등의 개연적 추론을 통해 수학적 추측을 제기하고 정당화하며, 수학적 증거와 논리적 근거를 바탕으로 비판적으로 사고하는 태도를 갖게 한다.”라고 서술하고 있다([14, p. 44]). 더 나아가 Polya([16])는 문제 해결을 위한 발견술로 유추를 제시하고 있으며, 교사가 학생이 유추를 이용하여 문제를 해결할 수 있도록 도와줄 수 있는 발문으로 ‘만일 제기된 문제를 풀 수 없다면, 먼저 어느 정도 그와 관련된 문제를 풀어보아라. 유사한 문제를 생각해 낼 수 있는가?’를 제시하였다. 이처럼 유추적 사고는 수학과 교수학습에서도 학생의 문제해결 및 추론 역량의 함양에 긍정적인 영향을 줄 수 있다.

2.2. Horadam 수열의 항등식에 관한 선행연구

Horadam([7])은 일반화된 피보나치 수열 $\{w_n\}$ 을 초깃값이 $w_0 = a$, $w_1 = b$ 이고 점화관계가 $w_n = pw_{n-1} - qw_{n-2}$ ($n \geq 2$)인 수열을 정의하였다. 최근에도 Keskin과 Siar([9]), Daşdemir([1]), Liu 외([13])는 Horadam이 정의한 수열 $\{w_n\}$ 을 Horadam 수열이라고 정의한 후, Horadam 수열의 다양한 성질에 관해 연구하였다. 본 연구에서는 Horadam 수열을 $\{H_n\}$ 으로 표현하고, 초깃값이 $H_0 = a$, $H_1 = b$ (a 와 b 는 실수)이고 점화관계가 $H_n = pH_{n-1} + qH_{n-2}$ ($n \geq 2$) (p 와 q 는 실수. $q \neq 0$, $p^2 + 4q \neq 0$)인 2차 선형 재귀 수열로 정의하였다.

많은 연구자는 Horadam 수열의 항등식에 관해 연구하였다. Keskin과 Siar([9])는 Horadam 수열을 $\{H_n\}$ 에 대하여 수열 $\{U_n\}$ 을 초깃값이 $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ 이고 점화관계가 $U_n = pU_{n-1} + qU_{n-2}$ ($n \geq 2$), 수열 $\{V_n\}$ 을 초깃값이 $V_0 = 2$, $V_1 = p$ 이고 점화관계가 $V_n = pV_{n-1} + qV_{n-2}$ ($n \geq 2$)인 수열로 정의하였다. 또한 수열 $\{X_n\}$ 을 $X_n = W_{n+1} + qW_{n-1}$ 로 정의하고, 네 수열 $\{H_n\}$ 과 $\{U_n\}$, $\{V_n\}$, $\{X_n\}$ 과 관련된 여러 항등식을 제시하였다. 다음은 Keskin과 Siar([9])가 제시한 항등식 중 세 수열 $\{H_n\}$ 과 $\{U_n\}$, $\{V_n\}$ 과 관련된 것을 나타낸 것이다.

$$\begin{aligned}
H_{m+n} &= H_{m+1}U_n + qH_nU_{n-1} \\
(-q)^n H_{m-n} &= H_mU_{n+1} - H_{m+1}U_n \\
U_r H_{m+n+r} &= H_{m+r}U_{n+r} - (-q)^r H_mU_n \\
U_r H_{m+n-r} &= H_mU_n - (-q)^r H_{m-r}U_{n-r} \\
U_r H_{m+n} &= H_mU_{n+r} - (-q)^r H_{m-r}U_n
\end{aligned}$$

Daşdemir([1])은 Horadam 수열의 특수한 경우로 초깃값 $h_0 = 2b - ap$, $h_1 = bp - 2aq$ 이고, 점화관계가 $H_n = pH_{n-1} + qH_{n-2}$ ($n \geq 2$)인 수열에 대하여 $\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$, $\beta = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ 라 하면 수열 $\{H_n\}$ 의 비네 공식은 $H_n = (b - a\beta)\alpha^n + (b - a\alpha)\beta^n$ 임을 보였다. 또한 수열 $\{U_n\}$ 을 초깃값이 $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ 이고 점화관계가 $U_n = pU_{n-1} + qU_{n-2}$ ($n \geq 2$)인 수열로 정의하고, 세 상수 A, d, E 를 $A = b - a\beta$, $d = \alpha - \beta$, $E = b^2 - abp + a^2q$ 라 정의할 때, 다음과 같은 항등식을 제시하였다.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{H_{n+1} + qH_{n-1} + H_nd}{2Ad} \right)^m &= \frac{H_{mn+1} + qH_{mn-1} + H_mnd}{2Ad} \\
\left(\frac{p}{q^2} H_n H_{n+3} \right)^2 + \{2pH_{n+2}(2pH_{n+2} - H_n)\}^2 &= \{H_n^2 + 2pH_{n+2}(2pH_{n+2} - H_n)\}^2 \\
H_{n+1}^2 + qH_n^2 &= d^2 \{(b^2 + a^2q)U_{2n+1} + aq(2b - ap)U_{2n}\} \\
H_{n+m}H_{n-r} - H_nH_{n-r+m} &= E(-q)^{n-r} \{V_{r+m} - (-q)^s V_{r-m}\} \\
H_{n-2}H_{n-1}H_{n+1}H_{n+2} - H_n^4 &= Ed^2(-q)^{n-2} \{(p^2 - q)H_n^2 + Ed^2p^2(-q)^{n-1}\}
\end{aligned}$$

다수의 수학자는 Horadam 수열에서의 항등식을 연구하고 있으나, 수학자가 항등식을 발견한 아이디어는 논문에 드러나지 않는다. 교직수학의 관점에서 다양한 Horadam 수열에 대한 항등식은 학생에게 탐구를 위한 교수학습자료로 제공할 수 있으나, 새로운 항등식을 추측하는 과정을 제시해주지 못한다는 한계가 있다. 본 연구는 이러한 점을 고려하여 새로운 항등식을 추측하고 증명하는 과정을 포함하였다. Horadam 수열에 대한 항등식을 연구하는 관점에서 Keskin과 Siar([9])과 Daşdemir([1]), 본 연구의 차이점은 표 1과 같다.

본 연구에서는 기존의 연구 결과를 바탕으로 일반적인 상황의 항등식으로 확장하고 이를 증명하는 과정을 보여주는 사례로서 Horadam 수열을 활용하고자 한다.

2.3. 일반화된 피보나치 수열과 일반화된 펠 수열에서의 항등식

Heo([6])는 피보나치 수열 $\{F_n\}$, 루카스 수열 $\{L_n\}$, 일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$ 사이의 관계를 이용하여 일반화된 피보나치 수열의 항등식 3개를 다음과 같이 추측하고

표 1. 선행연구와 본 연구의 비교

	Keskin과 Siar([9])	Daşdemir([1])	본 연구
항등식 생성 아이디어의 제시 여부	제시되지 않음	제시되지 않음	- 기존의 연구로부터 개념 유추를 활용 - 유추적 전이가 실패한 사례도 포함
항등식의 증명 방법	행렬과 점화관계 이용	행렬과 점화관계 이용	- 기존의 연구로부터 방법유추를 활용 (점화관계 이용) - 행렬을 이용한 추가적인 방법 제시

증명하였다.

$$\begin{aligned}
 GF_{n+m} + (-1)^m GF_{n-m} &= GF_n L_m \\
 F_{m+1} GF_{n+m} - F_m GF_{n+m+1} &= (-1)^m GF_n \\
 (-1)^{m+1} GF_n + F_{m+1}(GF_{n+m} + GF_{n+m+2}) &= GF_{n+2m+2}
 \end{aligned}$$

Heo([5])는 피보나치 수열 $\{F_n\}$ 과 펠 수열 $\{P_n\}$ 이 2차 선형 재귀 수열로 비네 공식이 유사한 측면이 있어 두 수열을 일반화하여 만든 새로운 두 수열인 일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$ 과 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$ 도 유사할 것으로 추측하였다. 두 일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$ 과 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$ 의 유사성을 기반으로 Heo([6])가 제시한 일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$ 에서의 항등식을 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$ 에서의 항등식으로 추측하고 증명하였다. 피보나치 수열 $\{F_n\}$, 루카스 수열 $\{L_n\}$, 일반화된 피보나치 수열 $\{GF_n\}$ 과 대응하는 수열을 각각 펠 수열 $\{P_n\}$, 펠 루카스 수열 $\{PL_n\}$, 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$ 이라 할 때, 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$ 의 항등식 3개를 다음과 같이 추측하고 증명하였다.

$$\begin{aligned}
 GP_{n+m} + (-1)^m GP_{n-m} &= GP_n PL_m \\
 P_{m+1} GP_{n+m} - P_m GP_{n+m+1} &= (-1)^m GP_n \\
 (-1)^{m+1} GP_n + P_{m+1}(GP_{n+m} + GP_{n+m+2}) &= GP_{n+2m+2}
 \end{aligned}$$

더 나아가 Heo([5])는 일반화된 피보나치 수열의 점화관계가 $GF_n = GF_{n-1} + GF_{n-2}$ ($n \geq 2$)이고, 일반화된 펠 수열의 점화관계가 $GP_n = 2GP_{n-1} + GP_{n-2}$ ($n \geq 2$)라는 점을 일반화하여 수열 $\{G_n\}$ 을 초깃값이 $G_0 = a$, $G_1 = b$ 이고, 점화관계가 $G_n = kG_{n-1} + G_{n-2}$ ($n \geq 2$)인 수열로 정의하였다. 또한 유추적 사고를 적용하여 일반화된

피보나치 수열 $\{GF_n\}$ 과 일반화된 펠 수열 $\{GP_n\}$ 에서의 항등식에 대응하는 일반화된 수열 $\{G_n\}$ 에서의 항등식을 추측하고 증명하고자 하였다. 이를 위해 두 수열 $\{A_n\}$ 과 $\{B_n\}$ 을 초깃값이 $A_0 = 0, A_1 = 1$ 이고 점화관계가 $A_n = kA_{n-1} + A_{n-2}$, 초깃값이 $B_0 = 2, B_1 = k$ 이고 점화관계가 $B_n = kB_{n-1} + B_{n-2}$ 인 수열로 정의하였다. Heo([5])는 일반화된 수열 $\{G_n\}$ 의 항등식 3개를 다음과 같이 추측하고 증명하였다.

$$\begin{aligned} G_{n+m} + (-1)^m G_{n-m} &= G_n B_m \\ A_{m+1} G_{n+m} - A_m G_{n+m+1} &= (-1)^m G_n \\ (-1)^{m+1} G_n + A_{m+1} (G_{n+m} + G_{n+m+2}) &= G_{n+2m+2} \end{aligned}$$

3. 연구 결과 및 결론

Heo([5])는 일반화된 피보나치 수열과 일반화된 펠 수열에 대한 일반화된 수열로 수열 $\{G_n\}$ 을 초깃값이 $G_0 = a, G_1 = b$ 이고 점화관계가 $G_n = kG_{n-1} + G_{n-2}$ ($n \geq 2$)인 수열로 정의하였다. 이때, 바탕 영역에 해당하는 일반화된 피보나치 수열과 일반화된 펠 수열을 분석한 후, 목표 영역에 해당하는 수열에 대응하고자 하였다. 그 결과, 일반화된 수열 $\{G_n\}$ 에서의 항등식을 추측하기 위하여 두 수열 $\{A_n\}, \{B_n\}$ 을 각각 $A_0 = 0, A_1 = 1, A_n = kA_{n-1} + A_{n-2}$ ($n \geq 2$), $B_0 = 2, B_1 = k, B_n = kB_{n-1} + B_{n-2}$ ($n \geq 2$)로 정의하였으며, 세 항등식

$$\begin{aligned} G_{n+m} + (-1)^m G_{n-m} &= G_n B_m \\ A_{m+1} G_{n+m} - A_m G_{n+m+1} &= (-1)^m G_n \\ (-1)^{m+1} G_n + A_{m+1} (G_{n+m} + G_{n+m+2}) &= G_{n+2m+2} \end{aligned}$$

이 성립함을 증명하였다.

Horadam 수열은 일반화된 수열 $\{G_n\}$ 을 일반화한 것으로, 본 연구에서는 Horadam 수열을 $\{H_n\}$ 으로 표현하고, 초깃값이 $H_0 = a, H_1 = b$ (a 와 b 는 실수)이고 점화관계가 $H_n = pH_{n-1} + qH_{n-2}$ ($n \geq 2$) (p 와 q 는 실수. $q \neq 0, p^2 + 4q \neq 0$)인 2차 선형 재귀 수열로 정의하였다. Horadam 수열 $\{H_n\}$ 에서의 항등식은 특수한 사례로서의 $\{G_n\}$ 과 일반화된 대상인 $\{H_n\}$ 사이의 유사성을 바탕으로 유추적 사고를 적용할 수 있다.

본 연구에서는 유추적 사고를 적용하여 Horadam 수열 $\{H_n\}$ 에서의 항등식을 추측하고 증명하고자 하였다. Heo([5, 6])와 본 연구 사이의 관계는 유추적 사고의 관점에서 그림 1과 같이 표현할 수 있다.

Horadam 수열 $\{H_n\}$ 의 특성방정식은 $x^2 - px - q = 0$ 이 되고, 특성방정식의 두 근을 α, β 라 하자. 본 연구에서는 수열 $\{H_n\}$ 의 특성방정식이 중근을 갖는 경우를 제외하였으며, 이때 Horadam 수열의 비네 공식은 다음과 같다.

$$H_n = A\alpha^n + B\beta^n, \quad A + B = a, \quad A\alpha + B\beta = b$$

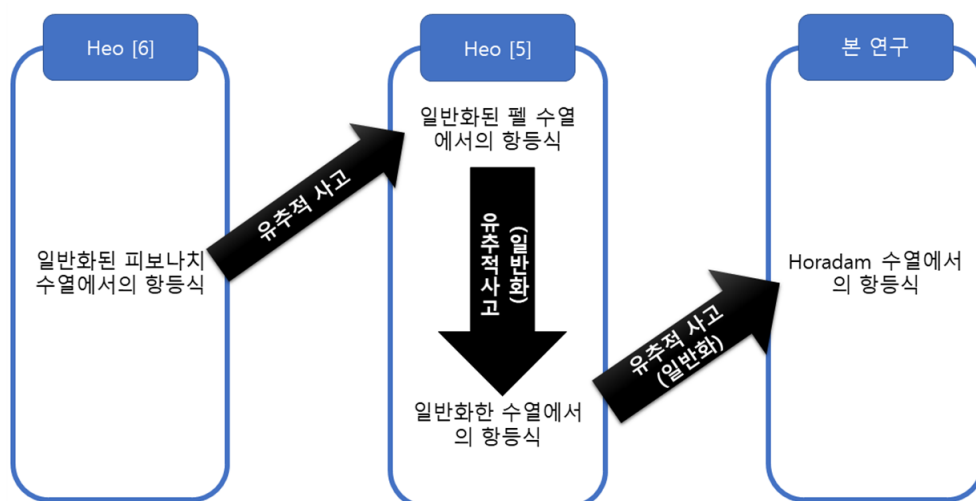


그림 1. Heo([5, 6])와 본 연구 사이의 관계

3.1. 개념 유추를 활용한 Horadam 수열의 항등식 추측

본 연구에서는 유추적 사고를 통해 Horadam 수열의 항등식을 추측하고자 하였다. 이를 위해 바탕 영역인 일반화된 수열 $\{G_n\}$ 에서의 두 수열 $\{A_n\}$ 과 $\{B_n\}$ 에 대응하는 목표 영역에서의 두 수열을 $\{U_n\}$ 과 $\{V_n\}$ 을 정의할 필요가 있다. 이때, 바탕 영역에서의 항등식을 추측하고 증명하는 데 성공적으로 활용된 수열을 기반으로 목표 영역에서의 대응 관계를 나타내면 표 2와 같다.

바탕 영역인 수열 $\{G_n\}$ 에서의 3개의 항등식에 대응하는 목표 영역에서의 항등식은 표 3과 같이 추측할 수 있다.

수열 $\{H_n\}$ 이 $H_0 = 0, H_1 = 1, H_n = H_{n-1} + 2H_{n-2} \ (n \geq 2)$ 인 경우를 생각하면, $H_2 = 1, H_3 = 3$ 이므로 $H_3 + (-1)^1 H_1 = H_2 V_1$ 이 성립하는지 확인할 수 있다. 하지만 등식의 좌변은 2이고, 우변은 1이 되어 목표 영역에서 항등식이 옳지 않음을 알 수 있다. 다른 두 항등식 $U_{m+1}H_{n+m} - U_m H_{n+m+1} = (-1)^m H_n$ 과 $(-1)^{m+1} H_n + U_{m+1}(H_{n+m} + H_{n+m+2}) = H_{n+2m+2}$ 에 $m = n = 1$ 을 대입하면 성립하지 않음을 알 수 있다. 즉, 이는 바탕 영역의 항등식과 목표 영역의 항등식 사이의 대응 관계가 잘못된 것임을 의미한다.

표 2. 바탕 영역과 목표 영역 사이의 대응 관계

	바탕 영역	목표 영역
첫 번째 수열	수열 $\{G_n\}$ $G_n = C_1\phi^n + C_2\psi^n$	Horadam 수열 $\{H_n\}$ $H_n = A\alpha^n + B\beta^n$
두 번째 수열	수열 $\{A_n\}$ $A_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi - \psi}$	대응하는 수열 $\{U_n\}$ $U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$
세 번째 수열	수열 $\{B_n\}$ $B_n = \phi^n + \psi^n$	일반화된 펠 수열 $\{V_n\}$ $V_n = \alpha^n + \beta^n$
점화 관계	$G_n = kG_{n-1} + G_{n-2}$ ($n \geq 2$)	$H_n = pH_{n-1} + qH_{n-2}$ ($n \geq 2$)

* ϕ 와 ψ 는 이차방정식 $x^2 - kx - 1 = 0$ 의 두 근이다.

표 3. 유추적 사고를 통한 Horadam 수열의 항등식 추측

	바탕 영역	목표 영역
항등식 1	$G_{n+m} + (-1)^m G_{n-m} = G_n B_m$	$H_{n+m} + (-1)^m H_{n-m} = H_n V_m$ ($n \geq m$)
항등식 2	$A_{m+1}G_{n+m} - A_m G_{n+m+1} = (-1)^m G_n$	$U_{m+1}H_{n+m} - U_m H_{n+m+1} = (-1)^m H_n$
항등식 3	$(-1)^{m+1}G_n + A_{m+1}(G_{n+m} + G_{n+m+2}) = G_{n+2m+2}$	$(-1)^{m+1}H_n + U_{m+1}(H_{n+m} + H_{n+m+2}) = H_{n+2m+2}$

바탕 영역의 항등식에서 새로운 대응 관계를 찾아야 하며, 바탕 영역에서 -1 의 거듭제곱과 관련된 항은 $\phi\psi = -1$ 이라는 점을 고려하면 $\alpha\beta = -q$ 로 대응시킬 수 있으며, 그 결과는 표 4와 같다.

표 4의 목표 영역에서의 항등식 3은 $m = 0$ 을 대입하면 좌변은 $(-q)H_n + H_n + H_{n+2}$ 이고, 우변은 H_{n+2} 가 되어 일반적으로 성립하지 않음을 알 수 있다. 바탕 영역의 항등식 3에 대응하는 목표 영역에서의 항등식을 찾기 위하여, 바탕 영역의 항등식 3의 증명 과정을 분석하면 표 4의 항등식 3을 전개하였을 때 나타나는 항 $U_{m+1}H_{n+m}$ 에 대한 보정이 필요함을 알 수 있다. 이를 반영하여 유추적 사고를 통해 Horadam 수열의 항등식은 표 5와 같이 추측할 수 있다.

표 4. 유추적 사고를 통한 Horadam 수열의 항등식 추측

	바탕 영역	목표 영역
항등식 1	$G_{n+m} + (-1)^m G_{n-m} = G_n B_m$	$H_{n+m} + (-q)^m H_{n-m} = H_n V_m \ (n \geq m)$
항등식 2	$A_{m+1} G_{n+m} - A_m G_{n+m+1} = (-1)^m G_n$	$U_{m+1} H_{n+m} - U_m H_{n+m+1} = (-q)^m H_n$
항등식 3	$(-1)^{m+1} G_n + A_{m+1} (G_{n+m} + G_{n+m+2}) = G_{n+2m+2}$	$(-q)^{m+1} H_n + U_{m+1} (H_{n+m} + H_{n+m+2}) = H_{n+2m+2}$

표 5. 유추적 사고를 통한 Horadam 수열의 항등식 추측

	바탕 영역	목표 영역
항등식 1	$G_{n+m} + (-1)^m G_{n-m} = G_n B_m$	$H_{n+m} + (-q)^m H_{n-m} = H_n V_m \ (n \geq m)$
항등식 2	$A_{m+1} G_{n+m} - A_m G_{n+m+1} = (-1)^m G_n$	$U_{m+1} H_{n+m} - U_m H_{n+m+1} = (-q)^m H_n$
항등식 3	$(-1)^{m+1} G_n + A_{m+1} (G_{n+m} + G_{n+m+2}) = G_{n+2m+2}$	$(-q)^{m+1} H_n + U_{m+1} (q H_{n+m} + H_{n+m+2}) = H_{n+2m+2}$

3.2. 방법 유추를 활용한 Horadam 수열의 항등식 증명

Horadam 수열의 특성 방정식 $x^2 - px - q = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 $\alpha + \beta = p$ 이고, $\alpha\beta = -q$ 이다. 또한 α 와 β 를 이용하여 구한 세 수열 $\{H_n\}$, $\{U_n\}$ 과 $\{V_n\}$ 의 일반항은

$$\begin{aligned}
 H_n &= A\alpha^n + B\beta^n \text{ (단, } A, B \text{는 상수)} \\
 U_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\
 V_n &= \alpha^n + \beta^n
 \end{aligned}$$

이다. 세 수열 $\{H_n\}$, $\{U_n\}$ 과 $\{V_n\}$ 의 일반항과 점화관계를 이용하여 세 항등식을 증명하고자 한다.

정리 1. $H_{n+m} + (-q)^m H_{n-m} = H_n V_m \ (n \geq m)$

정리 1은 두 수열 $\{H_n\}$ 과 $\{V_n\}$ 의 일반항을 이용하여 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 H_{n+m} - H_n V_m &= (A\alpha^{n+m} + B\beta^{n+m}) - (A\alpha^n + B\beta^n)(\alpha^m + \beta^m) \\
 &= -(A\alpha^n \beta^m + B\alpha^m \beta^n) \\
 &= -(\alpha\beta)^m (A\alpha^{n-m} + B\beta^{n-m}) \\
 &= -(-q)^m H_{n-m}
 \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$H_{n+m} + (-q)^m H_{n-m} = H_n V_m$$

이다.

정리 2. $U_{m+1}H_{n+m} - U_m H_{n+m+1} = (-q)^m H_n$

정리 2는 두 수열 $\{U_n\}$ 과 $\{H_n\}$ 의 점화관계를 이용하여 증명할 수 있다. 이를 위해 함수 $f(n, m)$ 을

$$f(n, m) = U_{m+1}H_{n+m} - U_m H_{n+m+1}$$

라고 정의하자. 두 수열 $\{U_n\}$ 과 $\{H_n\}$ 의 점화관계를 이용하면

$$\begin{aligned}
 f(n, m+1) &= U_{m+2}H_{n+m+1} - U_{m+1}H_{n+m+2} \\
 &= (pU_{m+1} + qU_m)H_{n+m+1} - U_{m+1}(pH_{n+m+1} + qH_{n+m}) \\
 &= q(U_m H_{n+m+1} - U_{m+1}H_{n+m}) = -qf(n, m)
 \end{aligned}$$

이다. 이때, $f(n, 0) = H_n$ 이므로 $f(n, m) = (-q)^m H_n$ 이다.

즉, $U_{m+1}H_{n+m} - U_m H_{n+m+1} = (-q)^m H_n$ 이다.

정리 3. $(-q)^{m+1}H_n + U_{m+1}(qH_{n+m} + H_{n+m+2}) = H_{n+2m+2}$

정리 3은 두 수열 $\{H_n\}$ 과 $\{U_n\}$ 의 일반항을 이용하여 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 U_{m+1}(qH_{n+m} + H_{n+m+2}) &= \frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta} \{A\alpha^{n+m}(q + \alpha^2) + B\beta^{n+m}(q + \beta^2)\} \\
 &= \frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta} \{A\alpha^{n+m}(\alpha^2 - \alpha\beta) + B\beta^{n+m}(\beta^2 - \alpha\beta)\} \\
 &= \frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta} \{A\alpha^{n+m+1}(\alpha - \beta) - B\beta^{n+m+1}(\alpha - \beta)\} \\
 &= A\alpha^{n+2m+2} + B\beta^{n+2m+2} - A\alpha^{n+m+1}\beta^{m+1} - B\alpha^{m+1}\beta^{n+m+1} \\
 &= H_{n+2m+2} - (-q)^{m+1}(A\alpha^n + B\beta^n) \\
 &= H_{n+2m+2} - (-q)^{m+1}H_n
 \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$(-q)^{m+1}H_n + U_{m+1}(qH_{n+m} + H_{n+m+2}) = H_{n+2m+2}$$

이다.

3.3. 행렬을 이용한 Horadam 수열에서의 항등식 증명

Horadam 수열은 $\{H_n\}$ 으로 표현하고, 초깃값이 $H_0 = a, H_1 = b$ (a 와 b 는 실수)이고 점화관계가 $H_n = pH_{n-1} + qH_{n-2}$ ($n \geq 2$) (p 와 q 는 실수. $q \neq 0, p^2 + 4q \neq 0$)이다. 이를 행렬로 표현하면

$$\begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{n-1} \\ H_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_n \\ H_{n-1} \end{bmatrix}$$

이 된다. 이때, $A = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 이라 하면

$$\begin{bmatrix} H_n \\ H_{n-1} \end{bmatrix} = A^{n-1} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_0 \end{bmatrix}$$

이 된다. 행렬의 거듭제곱, Cayley-Hamilton 정리, 행렬식을 이용하여 세 항등식을 증명하고자 한다.

정리 1. $H_{n+m} + (-q)^m H_{n-m} = H_n V_m$ ($n \geq m$)

정리 1은 행렬의 Cayley-Hamilton 정리를 이용하여 증명할 수 있다.
 $\begin{bmatrix} H_n \\ H_{n-1} \end{bmatrix} = A^{n-1} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_0 \end{bmatrix}$ 으로부터 $\begin{bmatrix} H_{n+m} \\ H_{n+m-1} \end{bmatrix} = A^m \begin{bmatrix} H_n \\ H_{n-1} \end{bmatrix}$ 이고, $\begin{bmatrix} H_{n-m} \\ H_{n-m-1} \end{bmatrix} = A^{-m} \begin{bmatrix} H_n \\ H_{n-1} \end{bmatrix}$ 이다.

행렬 A 의 특성방정식은 $x^2 - px - q = 0$ 이므로 A 의 고윳값(eigenvalue)은 α 와 β 이다. 따라서 A^m 의 고윳값은 α^m 과 β^m 이고, Cayley-Hamilton 정리에 의해

$$(A^m)^2 - (\alpha^m + \beta^m)A^m + (\alpha^m \beta^m)I = O$$

이다. 이때, $\alpha^m + \beta^m = V_m$ 이고, $\alpha^m \beta^m = (-q)^m$ 이므로

$$(A^m)^2 - V_m A^m + (-q)^m I = O$$

로 나타낼 수 있다. 양변에 A^m 의 역행렬 A^{-m} 을 곱하면

$$A^m + (-q)^m A^{-m} = V_m I$$

이다. $(A^m + (-q)^m A^{-m}) \begin{bmatrix} H_n \\ H_{n-1} \end{bmatrix} = V_m \begin{bmatrix} H_n \\ H_{n-1} \end{bmatrix}$ 이므로

$$\begin{bmatrix} H_{n+m} \\ H_{n+m-1} \end{bmatrix} + (-q)^m \begin{bmatrix} H_{n-m} \\ H_{n-m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_m H_n \\ V_m H_{n-1} \end{bmatrix}$$

이 되어

$$H_{n+m} + (-q)^m H_{n-m} = H_n V_m$$

이다.

정리 2. $U_{m+1}H_{n+m} - U_mH_{n+m+1} = (-q)^m H_n$

정리 2는 행렬식을 이용하여 증명할 수 있다.

$$A^m \begin{bmatrix} H_{n+1} \\ H_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{n+m+1} \\ H_{n+m} \end{bmatrix} \text{이고, } A^m \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{m+1} \\ U_m \end{bmatrix} \text{이므로,}$$

$$A^m \begin{bmatrix} H_{n+1} & 1 \\ H_n & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{n+m+1} & U_{m+1} \\ H_{n+m} & U_m \end{bmatrix}$$

이 성립한다. 등식의 양변에 행렬식을 적용하면 $\det A = -q$ 이므로

$$-(-q)^m H_n = H_{n+m+1}U_m - H_{n+m}U_{m+1}$$

이다.

즉, $U_{m+1}H_{n+m} - U_mH_{n+m+1} = (-q)^m H_n$ 이다.

정리 3. $(-q)^{m+1}H_n + U_{m+1}(qH_{n+m} + H_{n+m+2}) = H_{n+2m+2}$

정리 3은 행렬의 거듭제곱과 행렬식을 이용하여 증명할 수 있다.

자연수 r 에 대하여 $A^r = \begin{bmatrix} U_{r+1} & qU_r \\ U_r & qU_{r-1} \end{bmatrix}$ 이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} H_{n+2m+3} \\ H_{n+2m+2} \end{bmatrix} = A^{m+1} \begin{bmatrix} H_{n+m+2} \\ H_{n+m+1} \end{bmatrix} \text{로부터}$$

$$(1) \quad H_{n+2m+2} = U_{m+1}H_{n+m+2} + qU_mH_{n+m+1}$$

이다. 마찬가지로 $\begin{bmatrix} H_{n+m+1} \\ H_{n+m} \end{bmatrix} = A^m \begin{bmatrix} H_{n+1} \\ H_n \end{bmatrix}$ 이므로

$$(2) \quad H_{n+m+1} = U_{m+1}H_{n+1} + qU_mH_n$$

$$(3) \quad H_{n+m} = U_mH_{n+1} + qU_{m-1}H_n$$

이다. $qU_m \times (2) - qU_{m+1} \times (3)$ 을 계산하면

$$(4) \quad qU_mH_{n+m+1} - qU_{m+1}H_{n+m} = q^2H_n(U_m^2 - U_{m-1}U_{m+1})$$

이다. 이때 $\det A = -q$ 이므로

$$\det A^m = (-q)^m = q(U_{m+1}U_{m-1} - U_m^2)$$

이 성립한다. 즉,

$$(5) \quad U_m^2 - U_{m-1}U_{m+1} = (-q)^{m-1}$$

이다. 식 (5)를 식 (4)에 대입하면

$$(6) \quad qU_m H_{n+m+1} = qU_{m+1} H_{n+m} + (-q)^{m+1} H_n$$

이다. 또한 식 (6)을 식 (1)에 대입하면

$$(-q)^{m+1} H_n + U_{m+1}(qH_{n+m} + H_{n+m+2}) = H_{n+2m+2}$$

이다.

3.4. 결론

유추적 사고는 수학적 지식의 형성이나 수학적 문제 해결에서 유용하다([4, 11, 12, 14-16]). 유추적 사고는 수학적 지식의 발달 과정에서 집합론, 대수학 등 여러 분야에서 수학적 개념을 도입하고 체계화하는 데 사용되었으며([11]), 학교수학에서 수학적 개념의 확장을 위해 이용하는 형식 불역의 원리도 유추적 사고로 볼 수 있다([12]). 더 나아가 수학적 문제 해결을 위한 발견술로 유추적 사고를 활용할 수 있으며([4, 15, 16]), 학생이 수학적 추측을 제기하고 정당화하는 과정에서도 사용할 수 있다([5]). 2022 개정 수학과 교육과정([14, p. 44])은 추론 역량의 함양을 위한 교수학습 방법으로 “귀납, 유추 등의 개연적 추론을 통해 수학적 추측을 제기하고 정당화하며, 수학적 증거와 논리적 근거를 바탕으로 비판적으로 사고하는 태도를 갖게 한다.”를 제시하고 있다. 이러한 점에서 예비수학교사와 현직 수학교사는 학생이 유추적 사고를 통해 수학적 추측을 제기하고 증명할 수 있도록 지도하기 위한 역량을 가지고 있어야 하며, 이를 위해 유추적 사고를 통해 수학적 추측을 제기하고 증명하는 과정에 대해 살펴보고 경험할 필요가 있다.

본 연구에서는 Heo([5])가 제시한 일반화된 피보나치 수열과 일반화된 펠 수열을 일반화한 수열 $\{G_n\}$ 의 항등식에 개념 유추를 적용하여 Horadam 수열의 항등식을 추측하고, 방법 유추를 적용하여 이를 증명하였다. 더 나아가 선형대수학의 행렬의 거듭제곱, Cayley-Hamilton 정리, 행렬식을 적용하여 Horadam 수열의 항등식을 증명하는 방법도 추가로 제시하였다. 본 연구의 결과는 다음과 같다.

첫째, 일반화된 수열 $\{G_n\}$ 의 각 요소에 대응하는 일반화된 펠 수열의 요소가 적절하게 대응하여야 한다. 일반화된 수열 $\{G_n\}$ 과 관련된 수열 $\{A_n\}$ 과 $\{B_n\}$ 에 대응하는 Horadam 수열 $\{H_n\}$ 에서의 수열을 적절하게 $\{U_n\}$ 과 $\{V_n\}$ 으로 대응시켰으나, 수열 $\{G_n\}$ 의 특성방정식에 대한 두 근의 곱인 -1 과 Horadam 수열 $\{H_n\}$ 의 특성방정식에 대한 두 근의 곱인 $-q$ 사이의 대응을 시키지 않아 추측한 항등식이 만족하지 않았다. 더 나아가 수열 $\{G_n\}$ 의 특성방정식에 대한 두 근의 곱인 -1 과 Horadam 수열 $\{H_n\}$ 의 특성방정식에 대한 두 근의 곱인 $-q$ 가 대응하더라도 특정한 변수에 대한 계수 1 을 q 로 대응시키지 않아 추측한 항등식이 만족하지 않은 경우도 나타났다. 이처럼 일반화된

수열 $\{G_n\}$ 의 각 요소에 대응하는 Horadam 수열 $\{H_n\}$ 에서의 요소가 적절하게 대응하여야 한다. 이는 Heo([4])에서 나타난 것처럼 유추적 사고를 통한 개념 확장이나 문제 해결에서는 바탕 영역과 목표 영역 사이의 적절한 대응을 찾는 것이 매우 중요하다.

둘째, 방법 유추는 바탕 영역에 대응하는 목표 영역의 대상을 찾는 데 활용할 수 있다. 일반적으로 방법 유추는 바탕 영역의 문제 해결 방법 x 를 목표 영역에 적용하는 과정에서 사용한다. 하지만 바탕 영역과 목표 영역의 적절한 대응을 찾지 못할 때에도 대응을 찾기 위한 전략으로 활용할 수 있다. 본 연구에서는 일반화된 수열 $\{G_n\}$ 의 항등식 3에 대응하는 Horadam 수열 $\{H_n\}$ 의 항등식을 추측하는 과정에서, G_{n+m} 의 계수인 1을 H_{n+m} 의 계수 q 로 대응시킬 필요가 있었다. 하지만 항등식에서 계수 1은 표현되지 않으므로 보정을 위한 변수를 찾는 것은 쉽지 않다. 본 연구에서는 수열 $\{G_n\}$ 의 항등식 3를 증명하는 데 있어 덧셈에 대한 역원이 이용되는 과정을 살펴보았으며, 수열 $\{H_n\}$ 의 항등식에서도 동일한 상황이 나타날 수 있도록 H_{n+m} 의 계수를 1에서 q 로 보정하였다. 즉, 수열 $\{H_n\}$ 의 항등식 3은 $(-q)^{m+1}H_n + U_{m+1}(H_{n+m} + H_{n+m+2}) = H_{n+2m+2}$ 에서 $(-q)^{m+1}H_n + U_{m+1}(qH_{n+m} + H_{n+m+2}) = H_{n+2m+2}$ 로 수정되었다.

셋째, 일반화한 수열 $\{G_n\}$ 을 이용하여 Horadam 수열 $\{H_n\}$ 의 항등식을 추측하고 이를 증명할 수 있다. 본 연구에서는 Heo([5])의 증명 방법을 수열 $\{H_n\}$ 의 항등식에 적용하여 증명하였다. 즉, 방법 유추는 목표 영역의 문제를 해결하기 위한 유용한 전략으로 사용될 수 있다.

학생이 수학적 추측을 제기하고 이를 정당화하는 과정은 추론 역량의 함양을 위해 중요하게 다루어지고 있다[14]. 교사는 학생에게 수학적 추측을 제기하고 이를 정당화하는 활동을 제공하기 위해서는 먼저 교사 스스로 이러한 경험을 할 필요가 있다. 즉, 예비수학교사와 현직 교사는 개념 유추를 적용하여 목표 영역의 성질을 추측하고, 방법 유추를 적용하여 추측한 성질이 옳은지를 증명해 볼 필요가 있다. Heo([5, 6])는 수학을 통한 일반화된 피보나치 수열에서의 항등식을 탐구하고, 일반화된 피보나치 수열과 유사한 일반화된 펠 수열에서의 항등식을 추측하고 정당화하며, 일반화된 피보나치 수열과 일반화된 펠 수열을 일반화한 새로운 수열 $\{G_n\}$ 의 항등식을 추측하고 정당화하는 기회를 제공하였다. 본 연구는 Heo([5, 6]) 연구의 연장선으로, 일반화된 수열 $\{G_n\}$ 을 일반화한 2차 선형 재귀 수열인 Horadam 수열 $\{H_n\}$ 의 항등식을 추측하고 정당화하는 과정을 제시하였다. 본 연구는 수학교사가 유추적 사고를 경험할 기회를 제공해 줄 수 있으며, 영재학생이 유추적 사고를 활용하여 수학적 지식을 점진적으로 확장하는 경험을 제공하기 위한 교수학습의 소재로 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

References

1. Daşdemir, A. (2023). On Horadam-Lucas Sequence. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, **29**(1), 116–124. <https://doi.org/10.22342/jims.29.1.1280.116-124>
2. Erdniev, P. M., & Han, I. (2005). *Mathematical exploration through analogy*. Seoul: Seungsan.
3. Han, I. (2007). A study on a generalization of the law of cosine using vector. *Communications of Mathematical Education*, **21**(1), 51-64.
4. Heo, N. G. (2017). Analogical reasoning in construction of quadratic curves. *The Journal of Educational Research in Mathematics*, **27**(1), 51-67.
5. Heo, N. G. (2025). A study on derivation of identities for the generalized Pell sequence by analogical reasoning. *Theoretical Mathematics and Pedagogical Mathematics*, **32**(4), 229-249. <https://doi.org/10.7468/jksmeb.2025.32.4.229>
6. Heo, N. G. (2025). Inquiry some identities for the generalized Fibonacci sequence to enhance preservice mathematics teachers' mathematising ability. *Theoretical Mathematics and Pedagogical Mathematics*, **32**(2), 139-151. <https://doi.org/10.7468/jksmeb.2025.32.2.139>
7. Horadam, A. F. (1965). Basic properties of a certain generalized sequence of numbers. *The Fibonacci Quarterly*, **3**(3), 161-176. <https://doi.org/10.1080/00150517.1965.12431416>
8. Kalman, D., & Mena, R. (2003). The Fibonacci Numbers: Exposed. *Mathematics Magazine*, **76**(3), 167-181. <https://doi.org/10.1080/0025570X.2003.11953176>
9. Keskin, R., & Siar, Z. (2019). Some new identities concerning the Horadam sequence and its companion sequence. *Communications of the Korean Mathematical Society*, **34**(1), 1 – 16, <https://doi.org/10.4134/CKMS.c170261>
10. Kim, K., & Park, D. (2024). A case study on the generalization process of the assembly system by mathematically gifted students. *Journal of Science Education for Gifted*, **16**(1), 8-25. <http://dx.doi.org/10.29306/jseg.2024.16.1.8>
11. Lee, K. H. (2009). The role of analogical reasoning in mathematical knowledge construction. *The Journal of Educational Research in Mathematics*, **19**(3), 355-369.
12. Lee, S. W. (2002). On the principle of the permanence of equivalent forms. *School Mathematics*, **4**(3), 463-481.
13. Liu, J.-Y., Li, H.-L., & Zhang, Z.-H. (2025). A Grammatical Interpretation of Horadam Sequence. *Axioms*, **14**(11), 819, <https://doi.org/10.3390/axioms14110819>
14. Ministry of Education (2022). *Mathematics curriculum*. Ministry of Education Notices, No. 2022-33.
15. Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning I: Induction and analogy in mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

16. Polya, G. (1971). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

^aNAM GU HEO, PROFESSOR. DEPARTMENT OF MATHEMATICS EDUCATION, SUNCHON NATIONAL UNIVERSITY:

Email address: `ngheo@scnu.ac.kr`